

Fundação Universidade Estadual de Londrina

CTU / Departamento de Estruturas

Professor: Valdir Bernardi Zerbimati

## Cálculo das escadas usuais

### 1. Cargas atuantes

1.1. Sobrecargas - São cargas verticais por  $m^2$  de projeção horizontal da escada. A NBR 6120 (antiga NB-5) recomenda os seguintes valores:

escada com acesso público -  $300 \text{ kgf/m}^2$

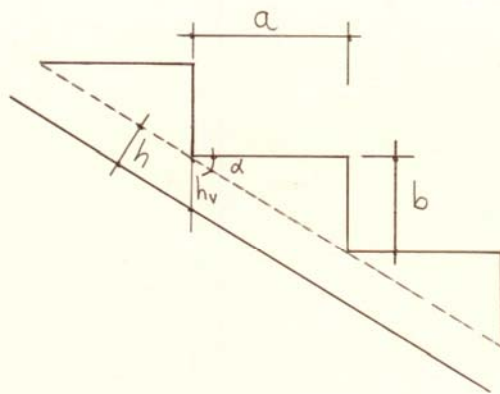
escada sem acesso público -  $250 \text{ kgf/m}^2$

Quando uma escada for constituída por degraus isolados, estes devem ser calculados para suportarem uma carga concentrada de  $250 \text{ kgf}$ , aplicada na posição mais desfavorável. Este carregamento não deve ser considerado na composição de cargas das vigas que suportam os degraus, as quais devem ser calculadas para a carga dada acima.

1.2. Pavimentação e revestimento - deve ser avaliada em cada caso, pois depende do material utilizado. Em geral o seu valor varia de  $50$  a  $100 \text{ kgf}$  por  $m^2$  de projeção horizontal da escada.

1.3. Peso próprio - avaliado por  $m^2$  de projeção horizontal.

Para se obter o valor do peso próprio basta multiplicar a altura média na vertical pelo peso específico do concreto.



$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

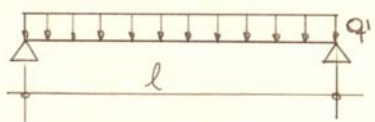
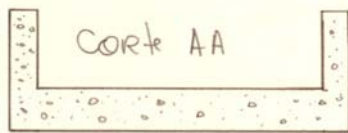
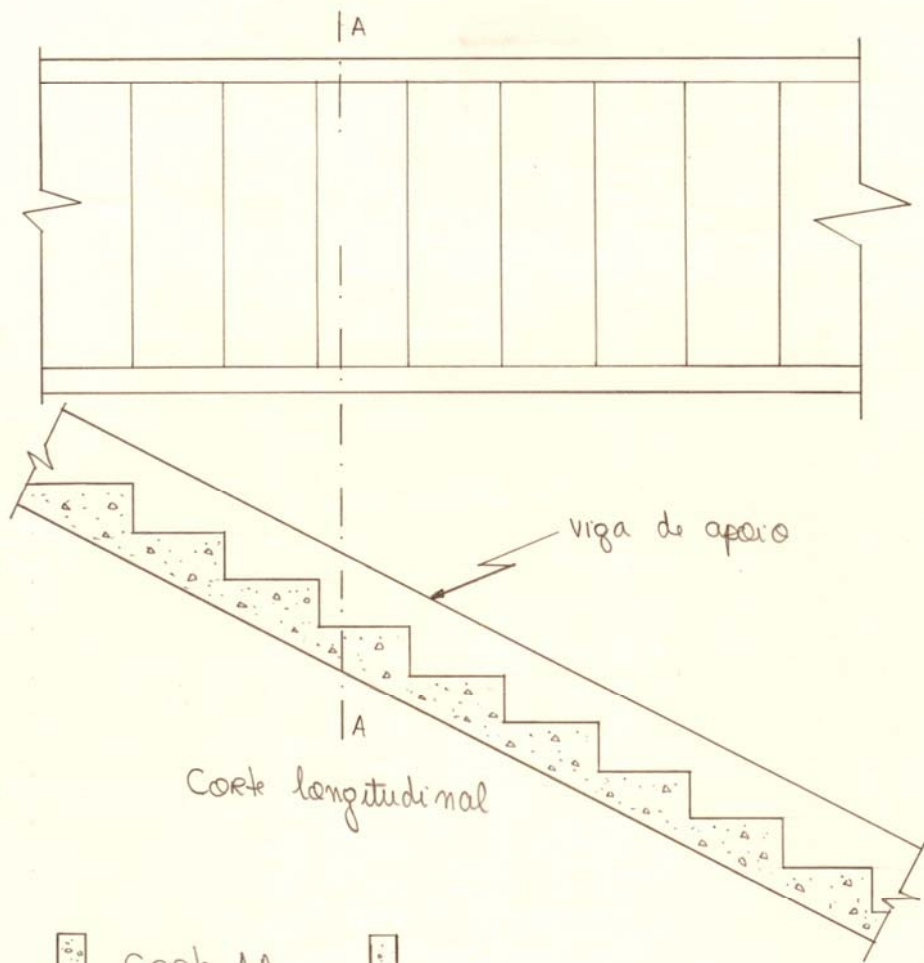
$$h_v = \frac{h}{\cos \alpha}$$

$$h_m = h_v + \frac{b}{2}$$

$$\text{peso próprio} = h_m \times \gamma_c$$

1.4. Parapeito - quando a escada possui vigas laterais, estas recebem a carga proveniente do parapeito. Quando não existirem vigas laterais pode-se, a título de aproximação, considerar o peso do parapeito uniformemente distribuído por  $m^2$  de projeção horizontal da escada. Entretanto, quando o parapeito for razoavelmente pesado (por exemplo de alvenaria de tijolos) é interessante se prever vigas sob os mesmos, pois caso contrário, a escada sofrerá momentos de torção consideráveis.

2. Escadas armadas transversalmente - neste caso, os apoios serão vigas situadas longitudinalmente nas faces laterais da escada.



$$M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

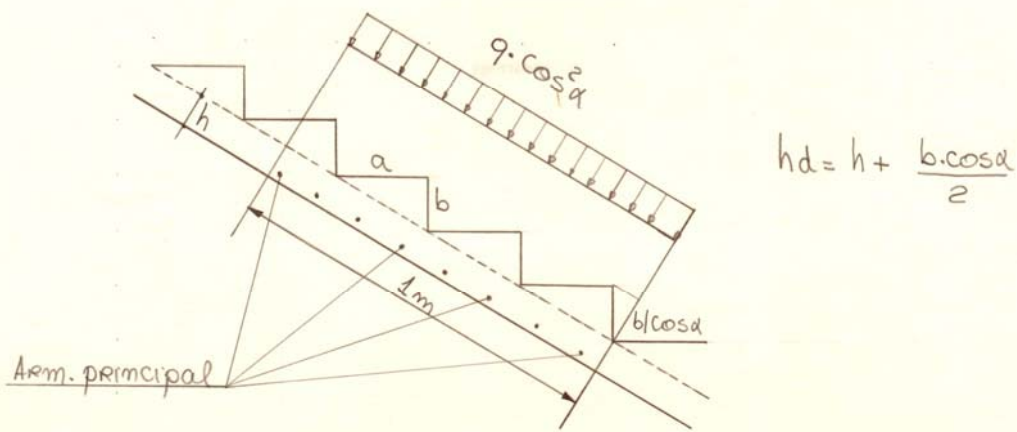
$q$  = carga vertical por  $m^2$  horizontal

$q'$  = carga perpendicular à escada por  $m^2$  inclinada

$$q' = q \cdot \cos^2 \alpha$$

Uma vez determinado o momento obtém-se facilmente as armaduras através dos procedimentos usuais.

A espessura da laje pode ser considerada com um valor médio ( $h_d$ )

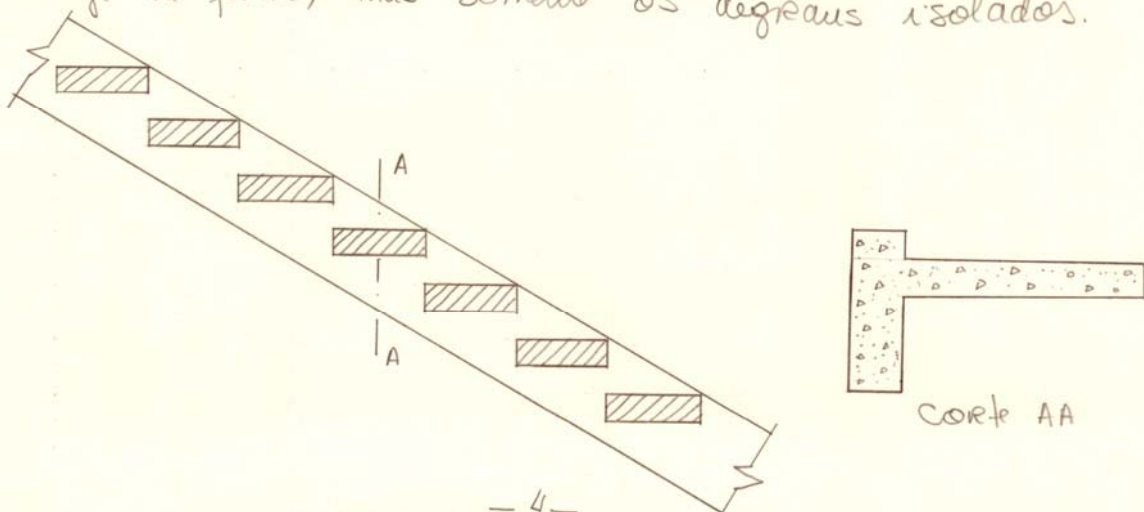


Longitudinalmente é colocado apenas uma armadura de distribuição, constituída de no mínimo três barras por metro.

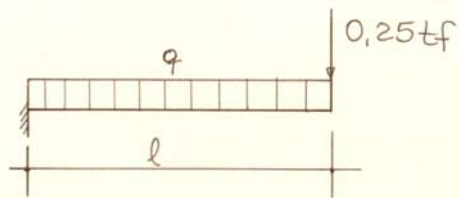
As escadas armadas transversalmente, dotadas de duas vigas laterais, exigem uma pequena espessura ( $h$ ). Entretanto, por razões de ordem construtiva não se deve adotar  $h < 5 \text{ cm}$ .

Quando existe viga de um só lado da escada, esta funciona como um balanço, engastado naquela, que deve então ser calculada para resistir à torção.

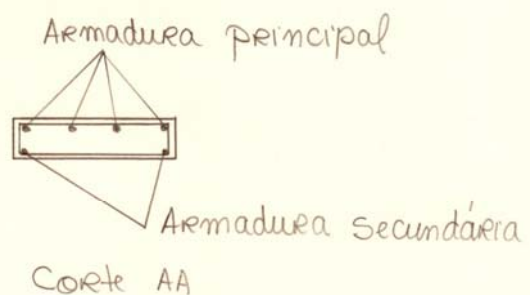
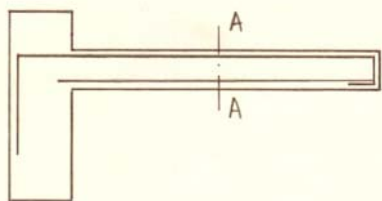
Normalmente nesse tipo de escada não se faz a laje de fundo, mas somente os degraus isolados.



Os degraus isolados são então dimensionados para resistir a uma carga uniformemente distribuída devida ao peso próprio mais revestimento e a uma carga concentrada na extremidade do balanço no valor de 250 kgf.



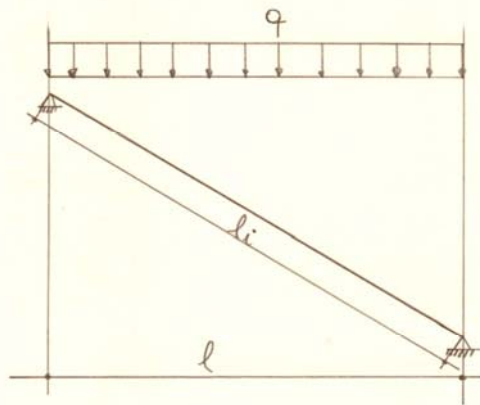
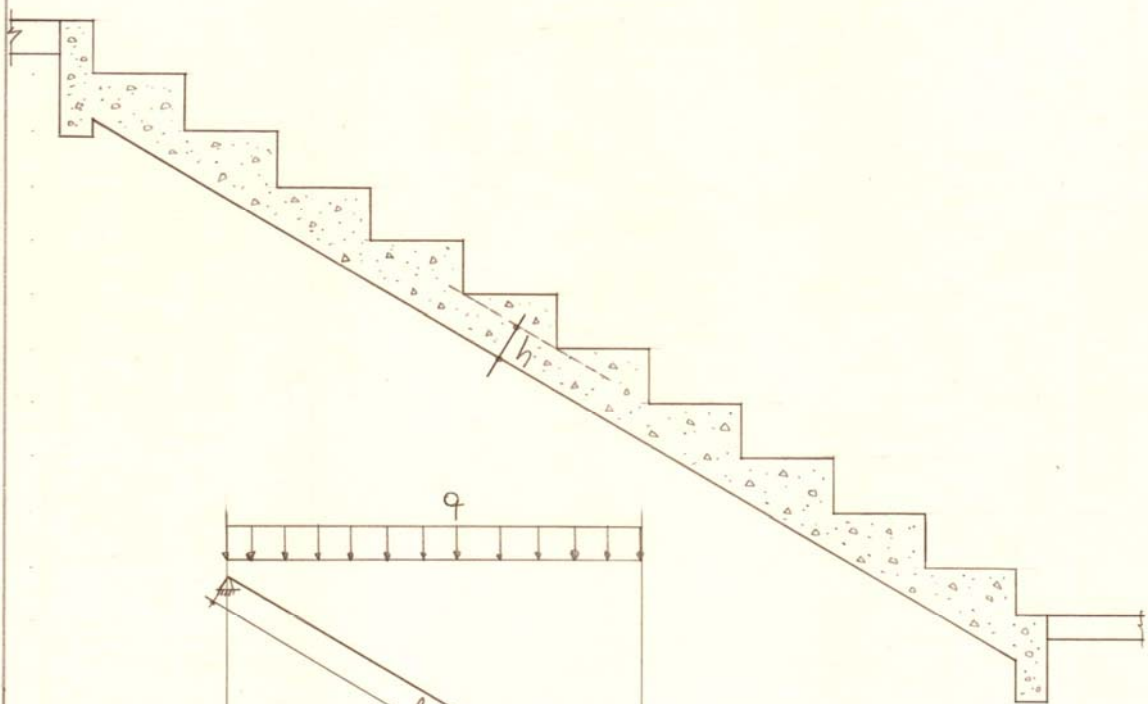
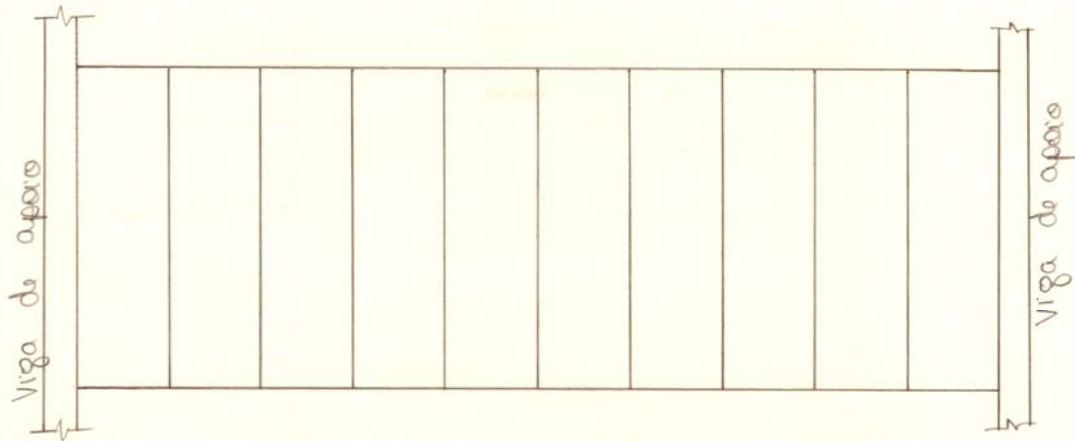
$$M = -\frac{q \cdot l^2}{2} - 0,25 \cdot l$$



Esquema das armaduras

Escadas que apresentam um ou mais patamares são calculadas do mesmo modo, mudando apenas os valores das cargas, já que não há degraus, e da espessura da laje.

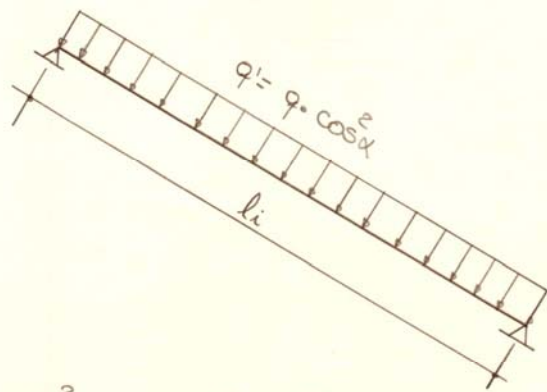
3. Escadas armadas longitudinalmente - neste caso, os apoios serão vigas situadas nos extremos da escada. Para esse tipo de escada, a análise das cargas atuantes, por  $m^2$  de projeção horizontal, em nada difere do caso anterior.



$$M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Para obtenção do momento máximo basta tomar a carga por  $m^2$  de projeção horizontal e o vão na horizontal. Na página seguinte está demonstrado que o valor obtido considerando a carga perpendicular ao plano

da escada e o vão inclinado é o mesmo.



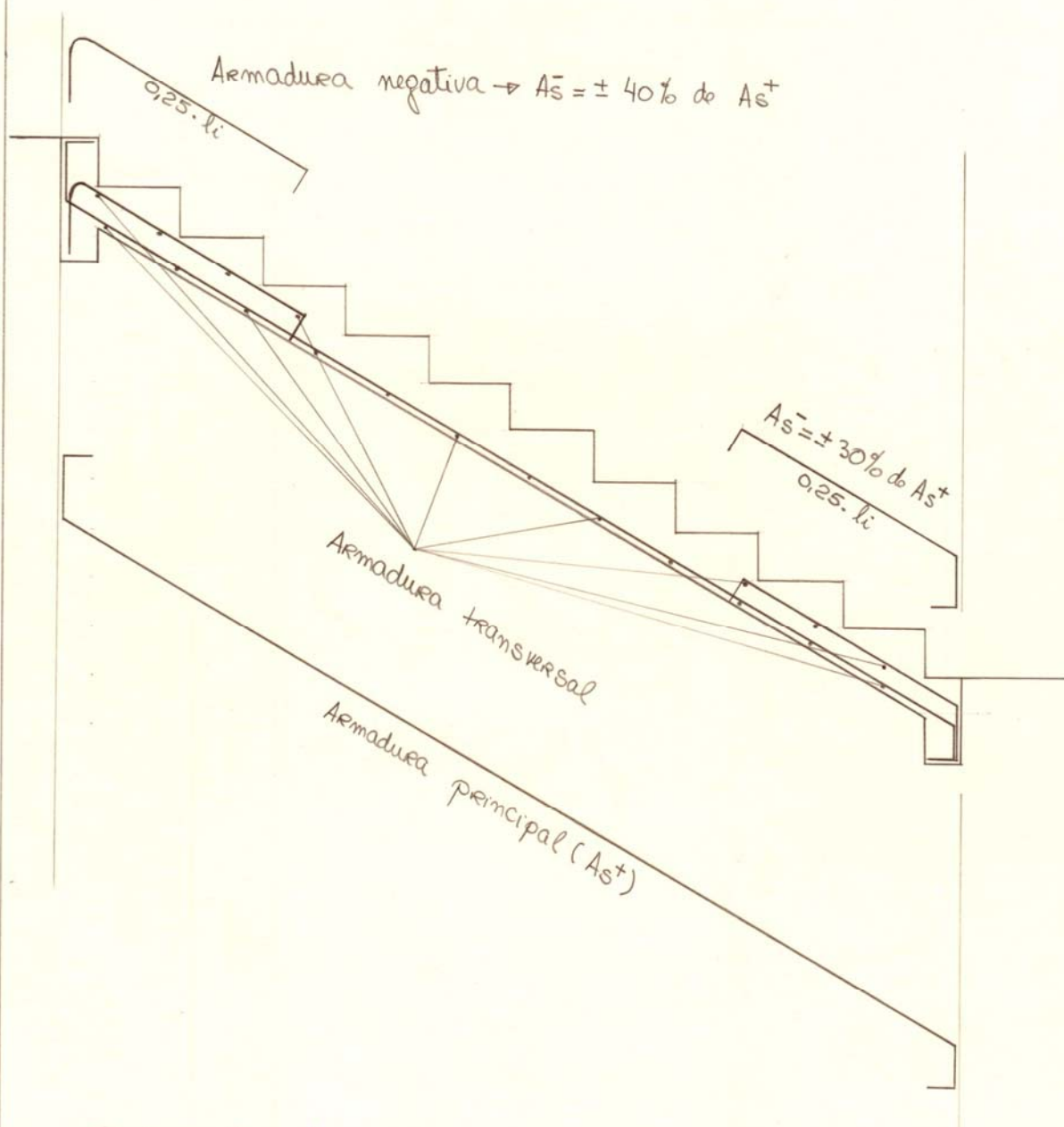
$$l_i = \frac{l}{\cos \alpha}$$

$$M_{\max} = \frac{q' \cdot l_i^2}{8} = \frac{q \cdot \cos^2 \alpha \cdot l^2}{8 \cos^2 \alpha} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

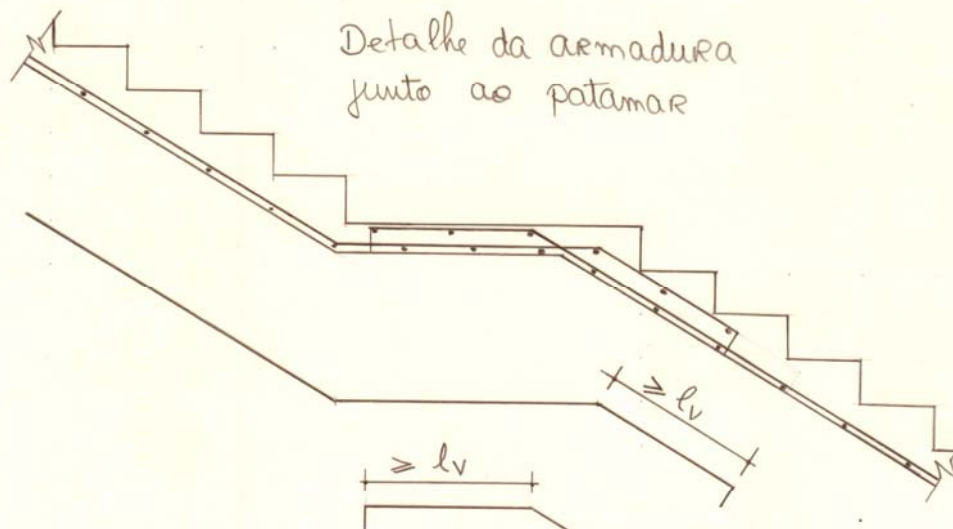
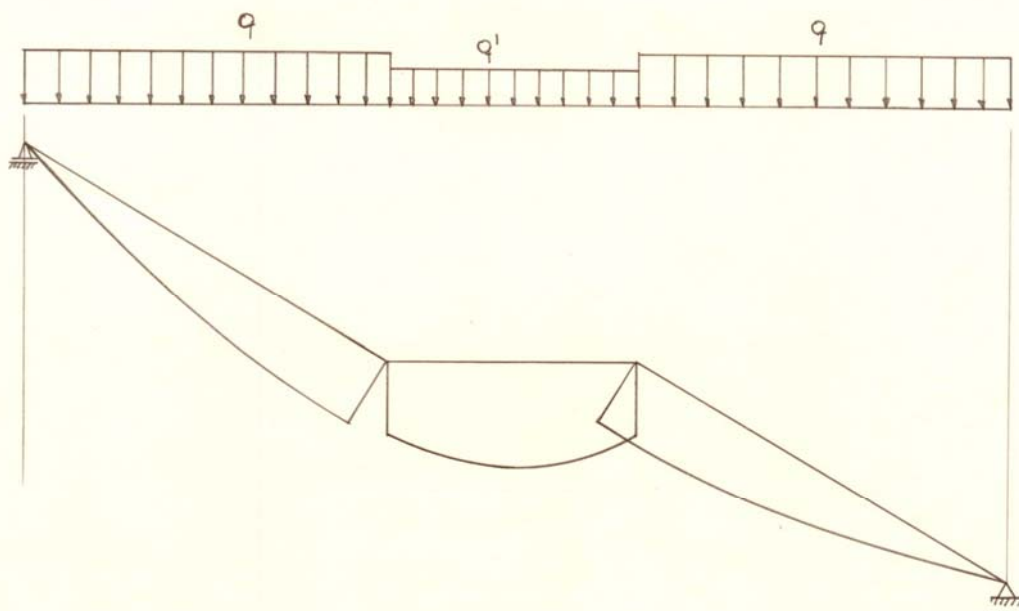
Uma vez obtido o valor de  $M_{\max}$  verifica-se se a altura  $h$  pré-dimensionada satisfaz. Se satisfizer basta dimensionar as armaduras (longitudinais) tomando apenas a altura  $h$  e não mais a altura média como no caso anterior. Se a altura  $h$  não for suficiente, ou for excessiva, basta mudar o seu valor e recalcular. Na direção transversal basta a colocação de uma armadura de distribuição.

Embora pelo cálculo só há necessidade de armaduras longitudinais na parte inferior da escada, aconselha-se a colocação de armaduras negativas nas regiões dos apoios, principalmente para vãos maiores que 3,00m aproximadamente. Tal armadura tem a finalidade de impedir que haja uma fissuração muito grande que tendo a se formar junto aos apoios

devido ao giro da escada.

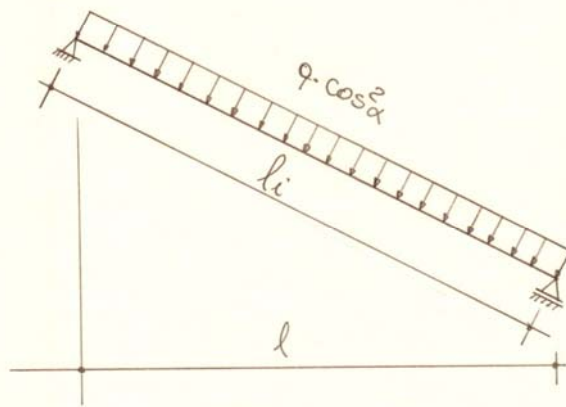
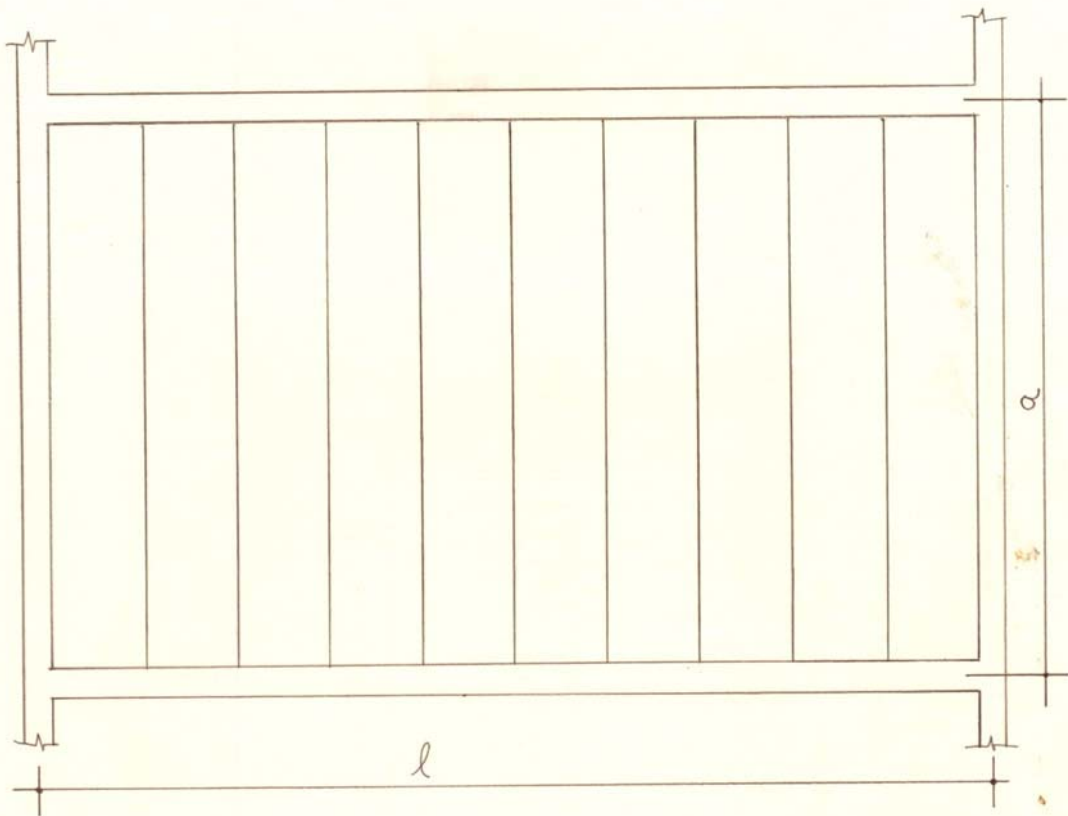


O procedimento anterior também pode ser adotado quando a escada apresenta patamar, intermediário ou extremo, ou os dois. A única diferença surge no detalhamento da armadura onde há a mudança de direção da mesma.



$l_v$  = comprimento de emenda  
por transpasse

4. Escadas armadas em Cruz - nos casos de escadas com trechos curtos e grandes largueas, pode-se adotar uma escada com apoios nos quatro lados, calculando-a como armada em cruz.



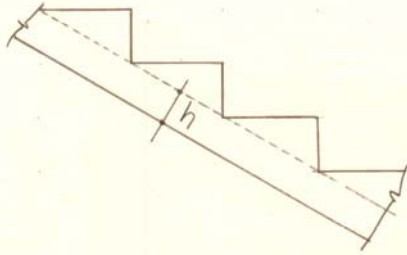
$$l_i = \frac{l}{\cos \alpha}$$

Conhecidos os valores de  $l_i$  e  $a$  determina-se a relação  $l_i/a$  e com tabelas ou formulários próprios para cálculo de lajes obtêm-se os momentos com os quais se dimensionam as armaduras. Esse procedimento é aproximado, pois como as espessuras nas duas direções são diferentes, não existe isotropia, como supõem

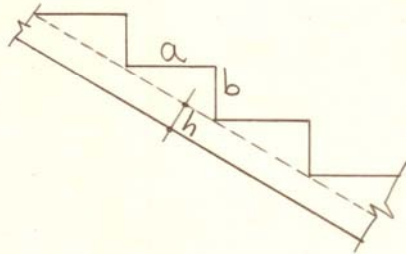
as barras corretas para cálculo de lajes.

As espessuras para dimensionamento das armaduras são as seguintes:

- na direção longitudinal  $\rightarrow h$

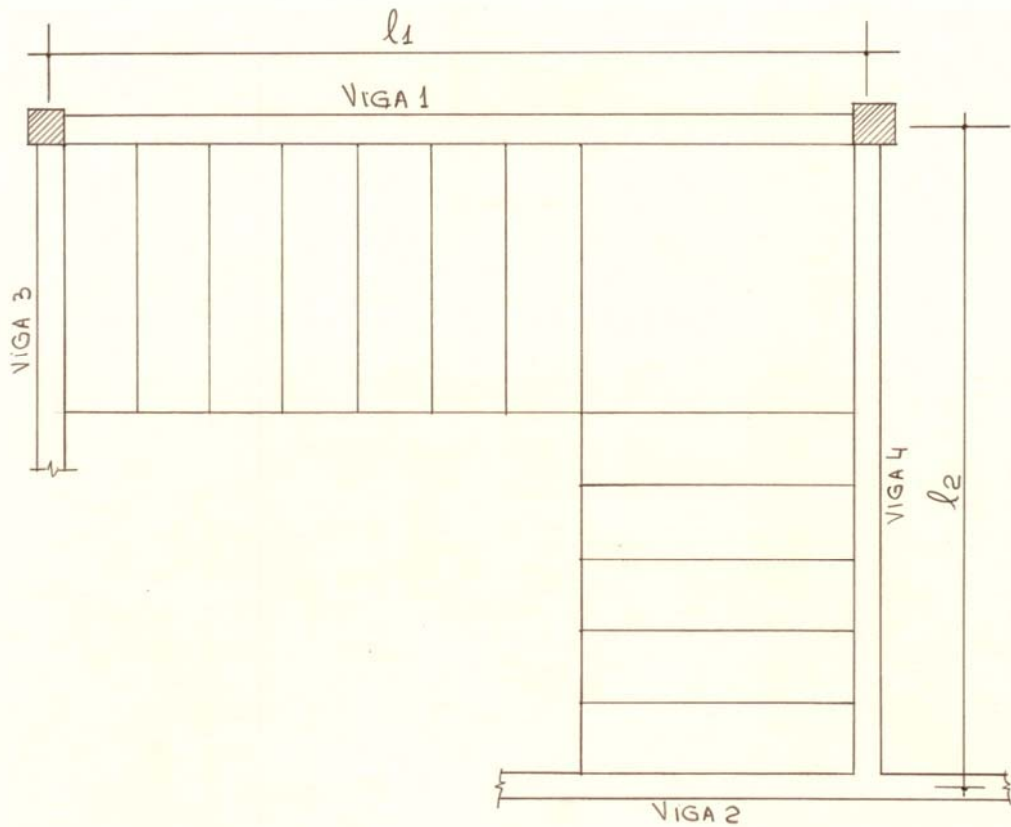


- na direção transversal  $\rightarrow h_d = h + \frac{b \cdot \cos \alpha}{2}$

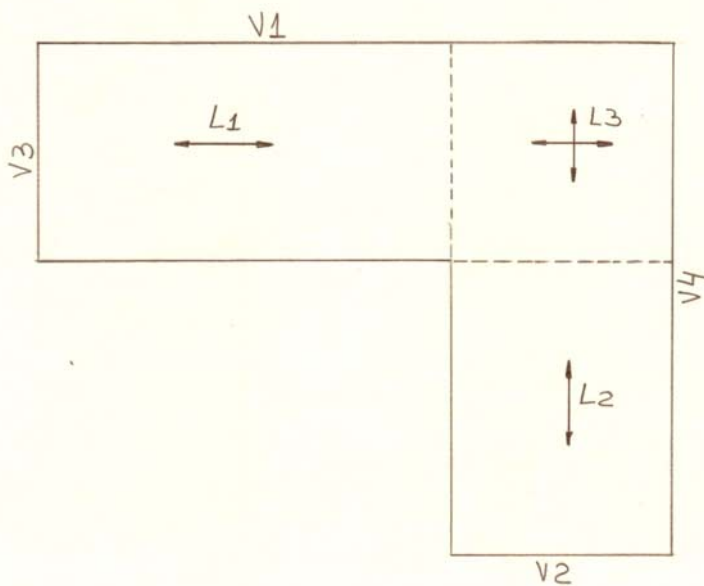


Para o detalhamento das armaduras valem as considerações feitas nos ítem (2) e (3).

5. Escadas em "L" - esse tipo de escada, em geral possui quatro vigas de apoio. É possível operar a escada apenas com três, no entanto. O cálculo exato exige que se considere a escada como uma estrutura espacial. Como tal cálculo é praticamente impossível de ser realizado a mão, são adotadas soluções aproximadas que resolvem satisfatoriamente bem o problema.



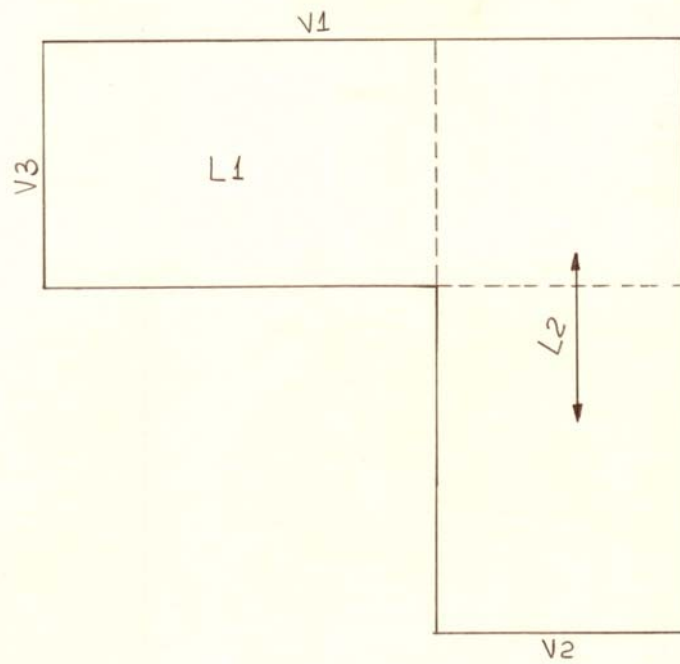
Se os vãos  $l_1$  e  $l_2$  forem aproximadamente iguais pode-se subdividir a escada em três trechos -  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . Os trechos  $L_1$  e  $L_2$  trabalham na direção longitudinal e o trecho  $L_3$  trabalha nas duas direções.



Observa-se que a escada não flete livremente na direção longitudinal, devido a existência das vigas  $V_1$  e  $V_4$ . Deste modo, na face lateral livre, os momentos fletores assumem os valores calculados supondo o funcionamento da escada na direção longitudinal. Junto às vigas laterais  $V_1$  e  $V_4$  os momentos fletores na direção longitudinal são nulos. Pode-se tomar como valores médios os correspondentes a uma faixa passando pelo centro da escada, admitidos como metade dos momentos calculados para a faixa situada na extremidade livre.

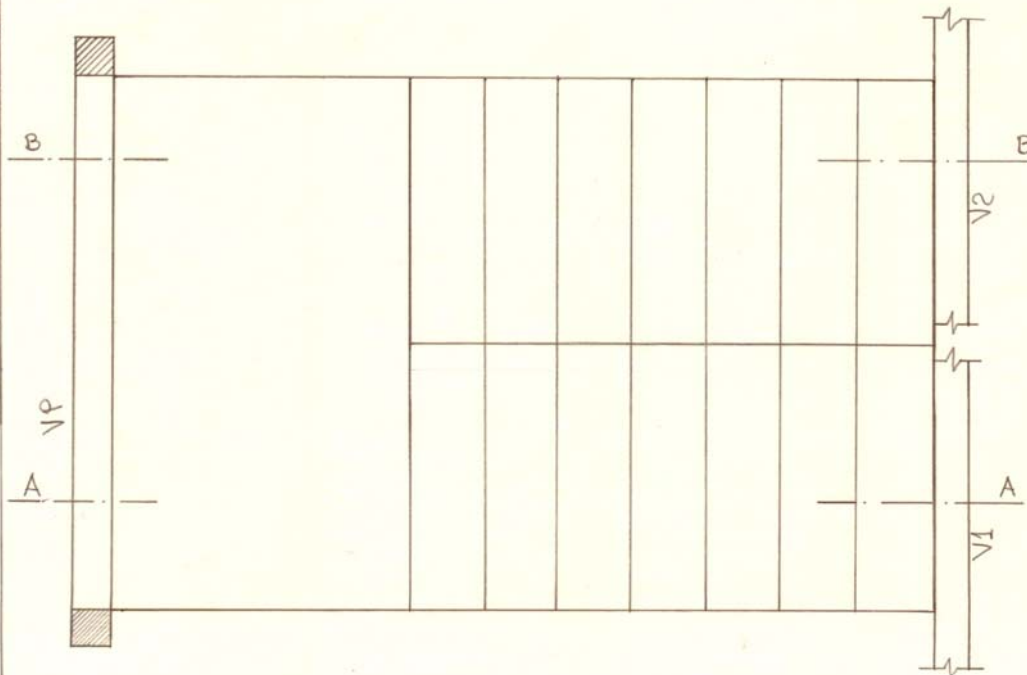
A consideração acima é aproximada e muito conservadora. Um cálculo, também aproximado, mais real porém, consiste em se calcular as lajes  $L_1$  e  $L_2$  apoiadas em três apoios - nas vigas laterais e de extremidade e nas linhas de união com o patamar - e a laje  $L_3$  apoiada nos quatro lados. Uma vez determinados os momentos obtêm-se facilmente as armaduras de acordo com os procedimentos enunciados nos itens anteriores.

Quando só existe uma viga lateral -  $V_1$  ou  $V_4$  - o esquema de cálculo muda. Admitindo-se que só existe a viga  $V_1$  calcula-se a laje  $L_1$  apoiada em três apoios e a laje  $L_2$  apoiada em  $V_1$  e  $V_2$  - armada longitudinalmente - recebendo uma parcela da carga da  $L_1$ .

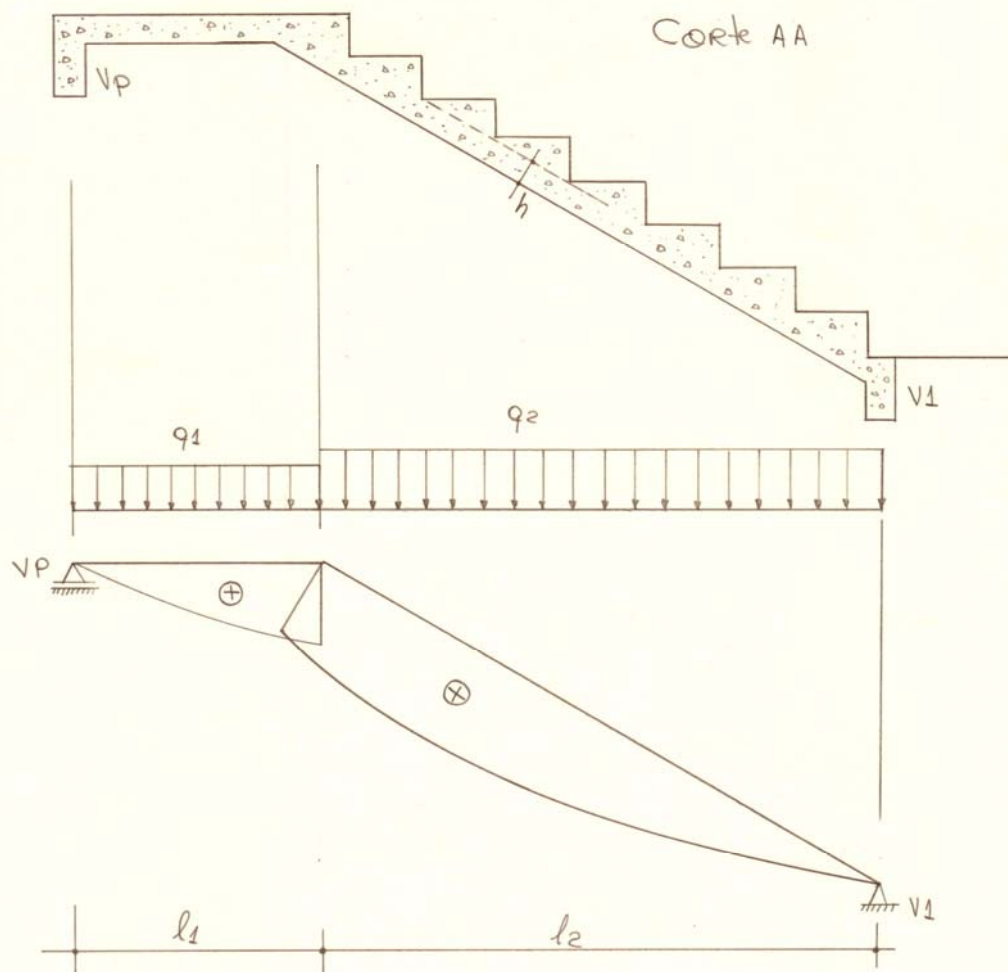


Para o detalhamento das armaduras valem as Recomendações feitas nos itens anteriores.

6. Escadas em "U" -

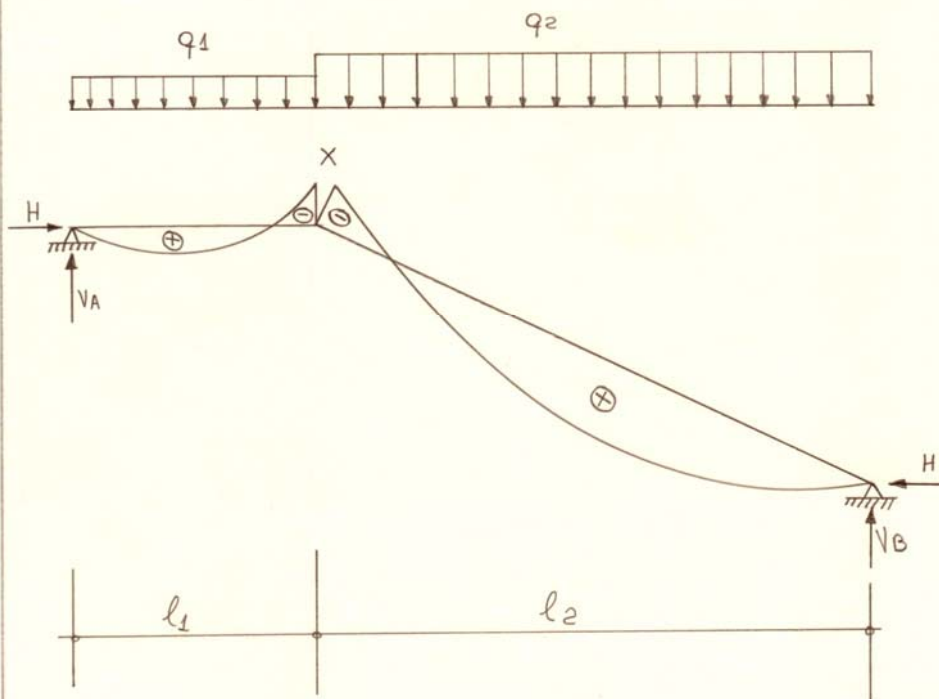


Esse tipo de escada é comumente apoiada em três vigas — uma no nível inferior, uma no nível superior e uma no nível do patamar. Com isso pode-se dividir a escada em dois trechos e armá-los longitudinalmente. Para cálculo dos esforços costuma-se admitir que cada um dos trechos seja simplesmente apoiado nas vigas.

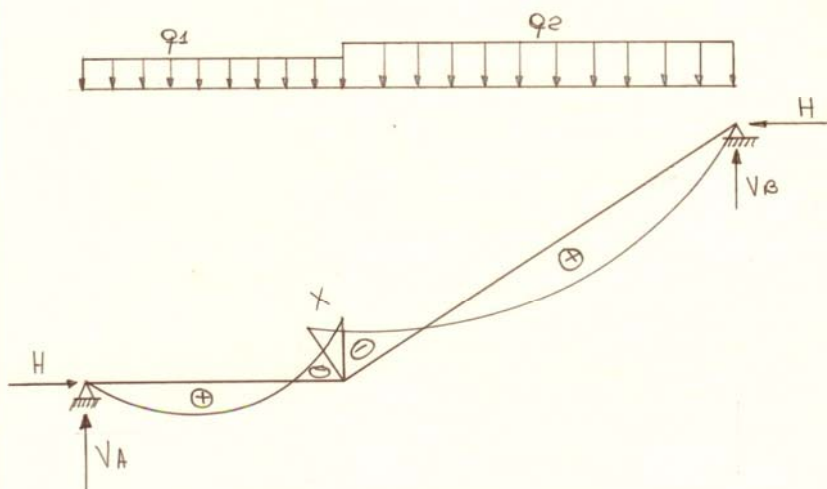


Nesse caso os momentos são facilmente calculados e com estes dimensiona-se a escada.

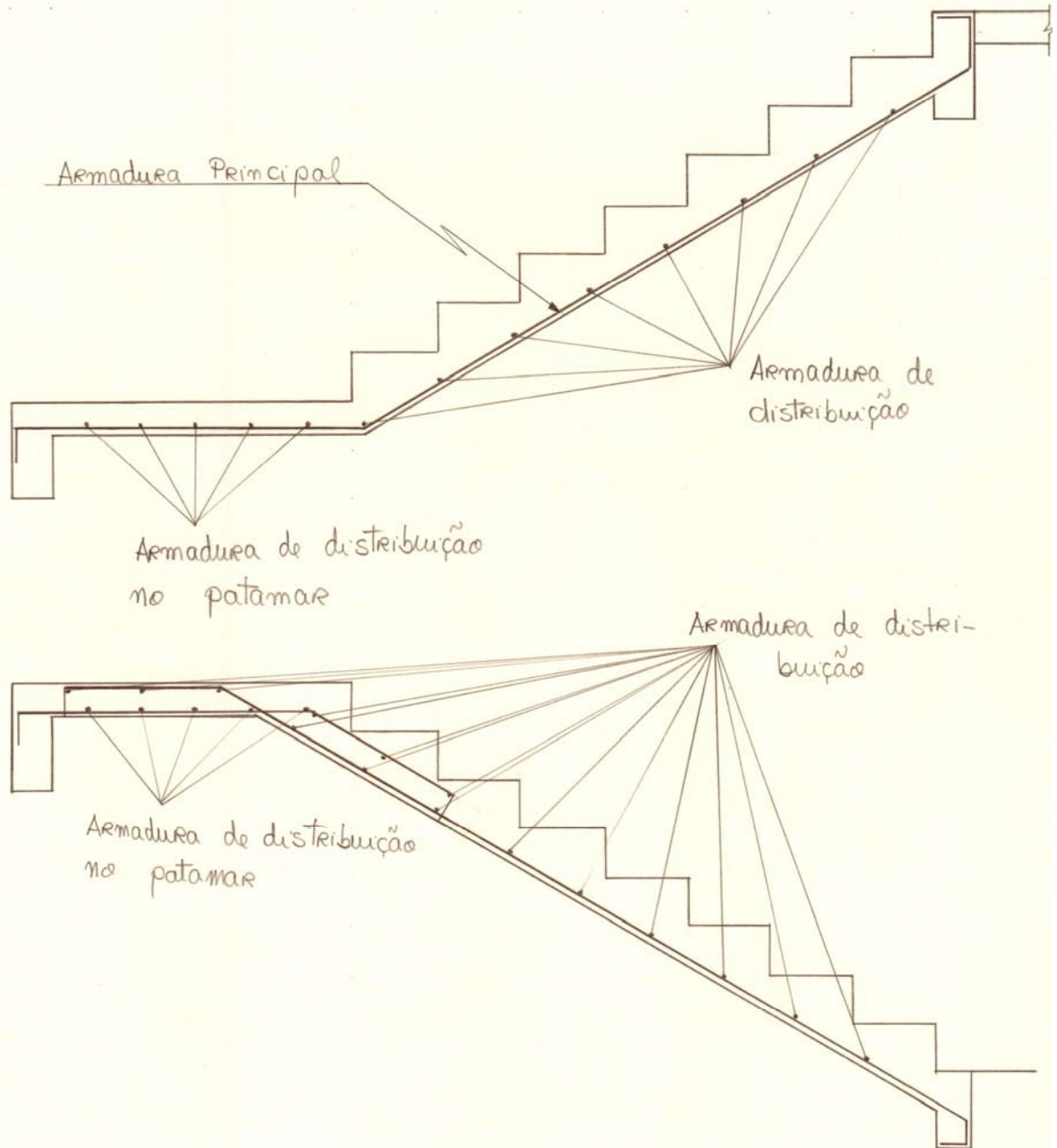
Quando as vigas que dão apoio à escada tem grande rigidez a esforços horizontais, o funcionamento desta modifica-se. O sistema passa a ser hiperestático, com a surgimento de um momento negativo na região de junção dos lances com o patamar, conforme esquema abaixo.



Para o outro trecho da escada a solução é semelhante.

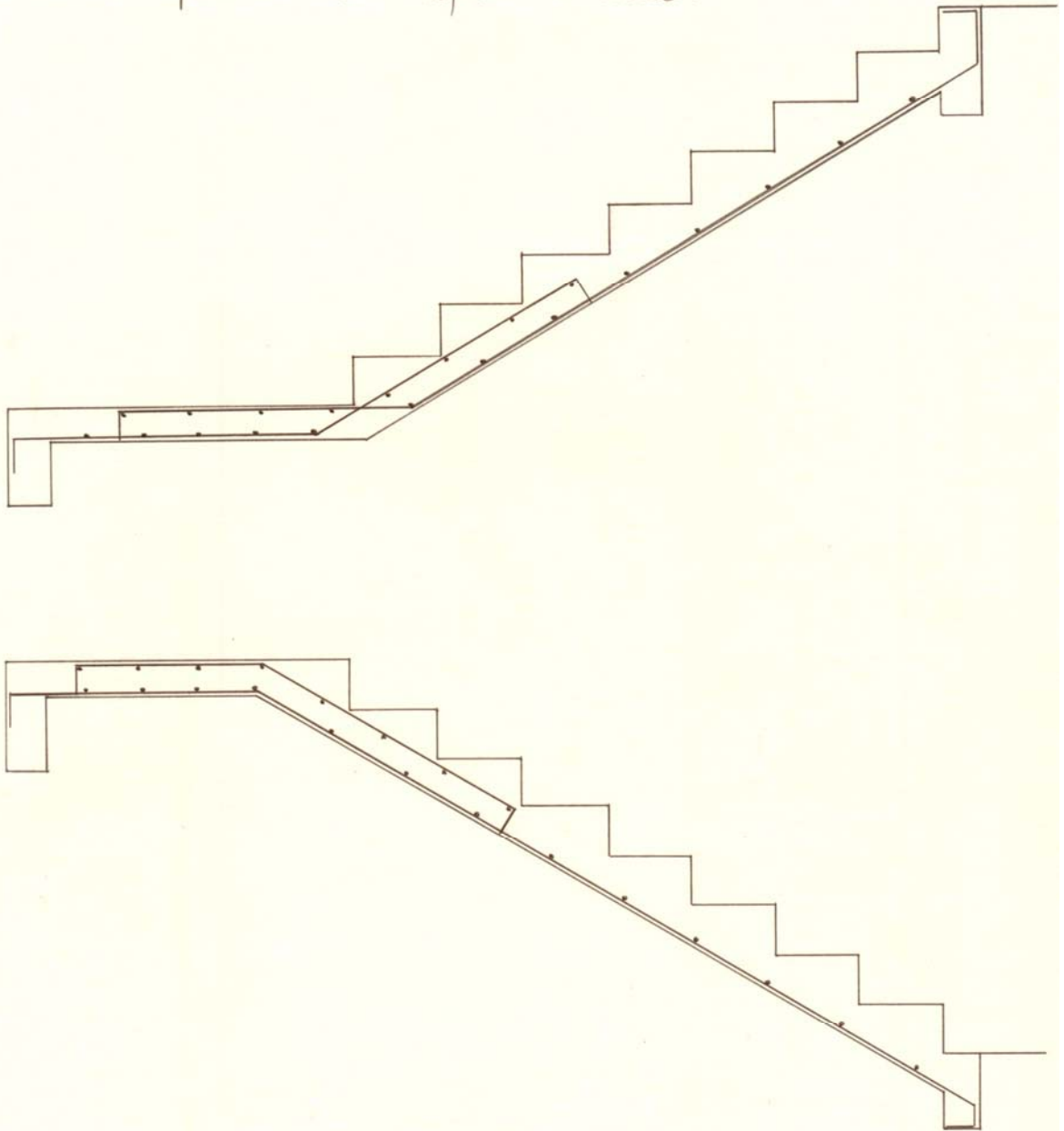


Detalhamento das armaduras para o caso da existência de momentos positivos somente.

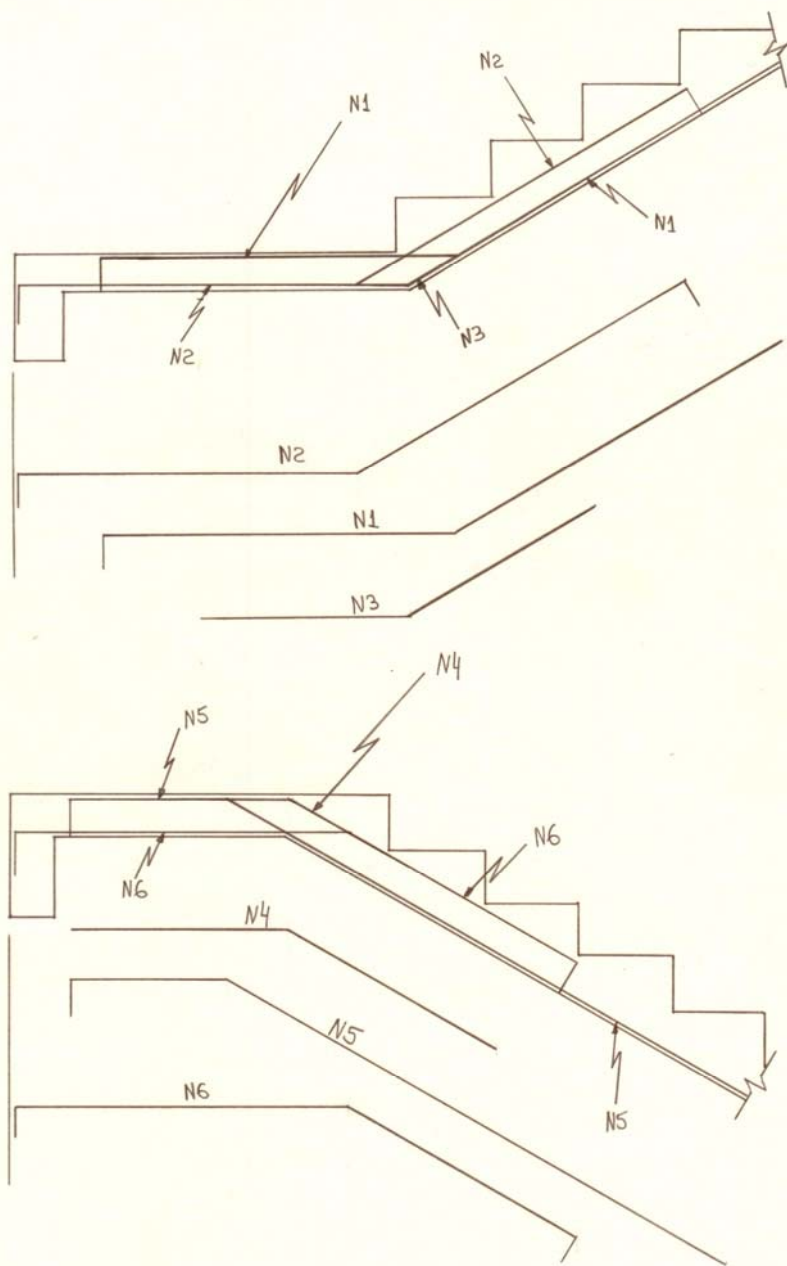


Para o caso de apoios com impedimento a deslocamentos horizontais, com o surgimento de momentos negativos, o deta-

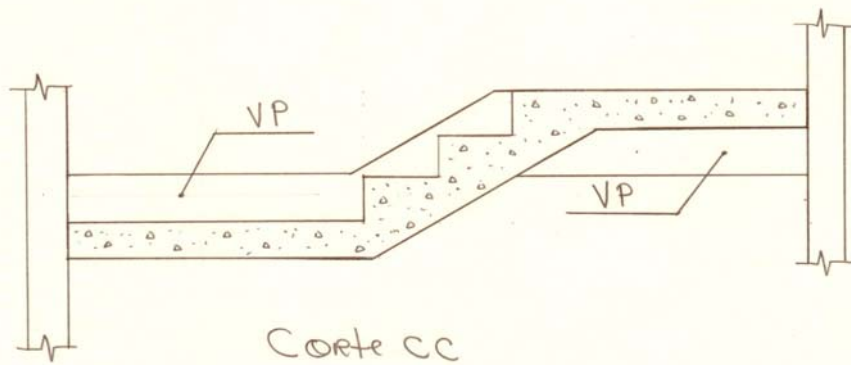
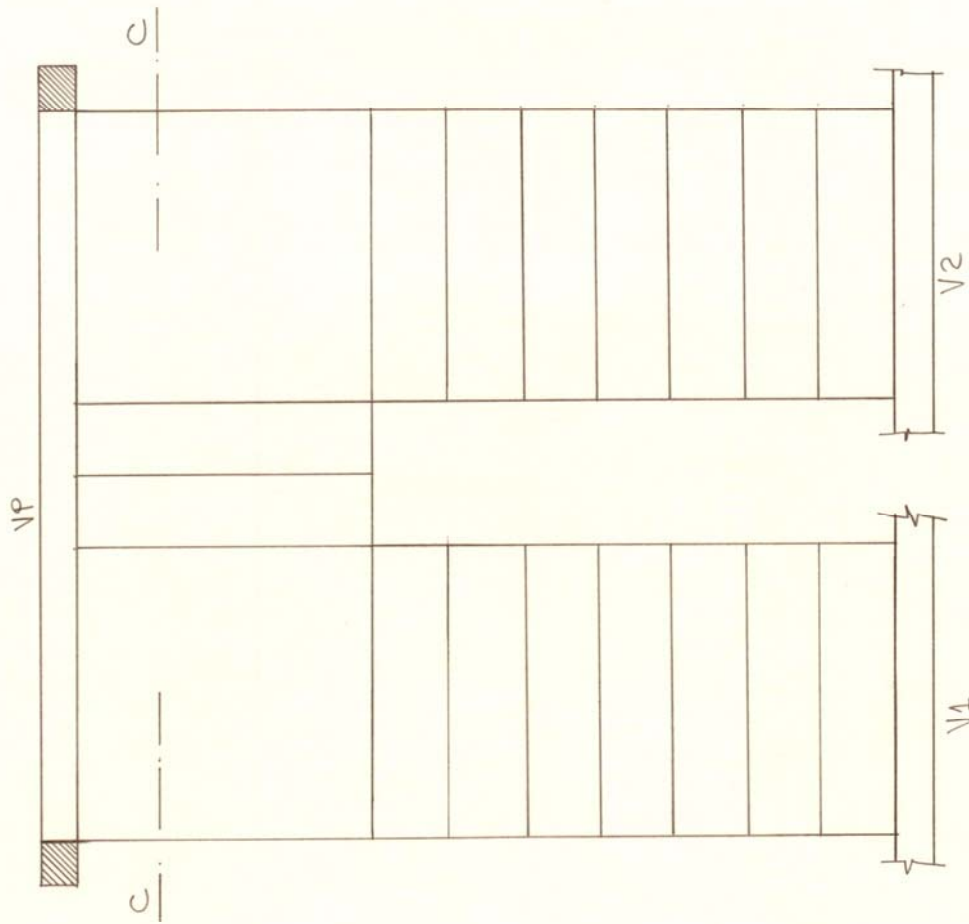
lhamento apresenta o aspecto abaixo.



Quando não se tem certeza das condições de vinculação nos apoios não se sabe ao certo como serão os momentos. Nesses casos pode-se determinar as armaduras considerando que só hajam momentos positivos - pior hipótese para a determinação das armaduras positivas - e detalhar as armaduras para observar momentos negativos.

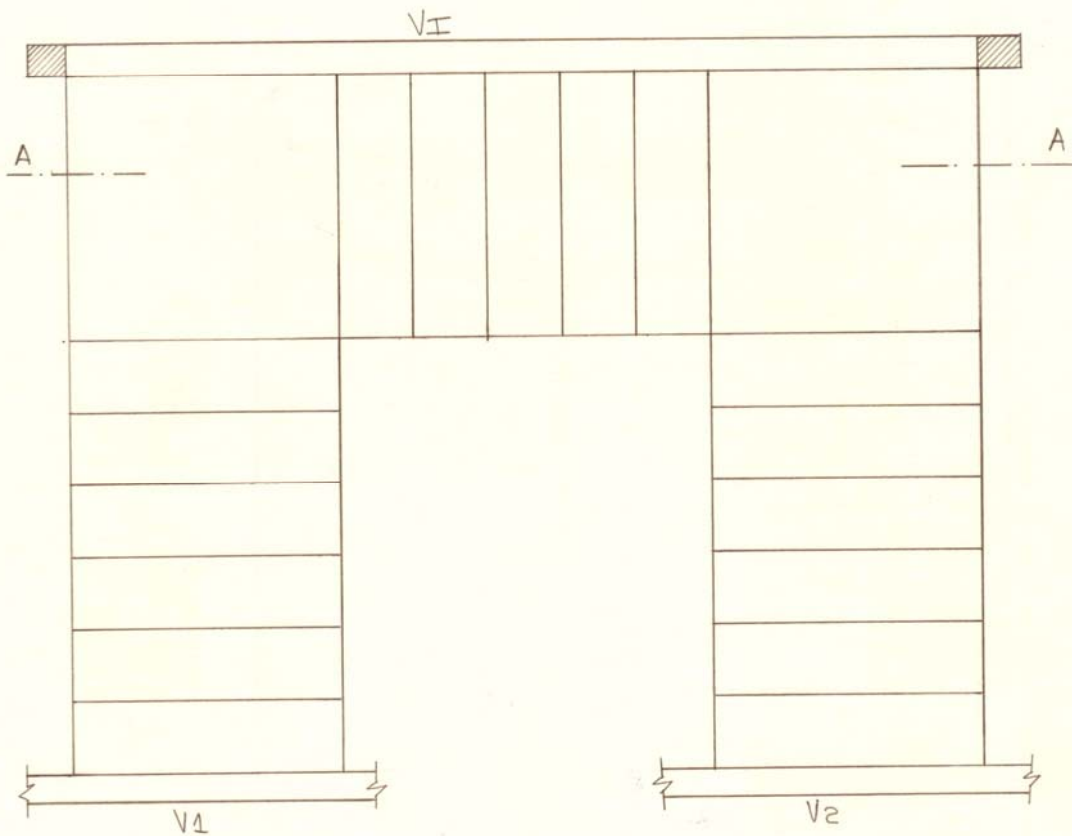


O procedimento exposto até aqui pode ser utilizado para o caso da escada da figura da página seguinte. Nesse caso calcula-se o tecto entre os dois patamares armado longitudinalmente, apoiando-se nos mesmos.

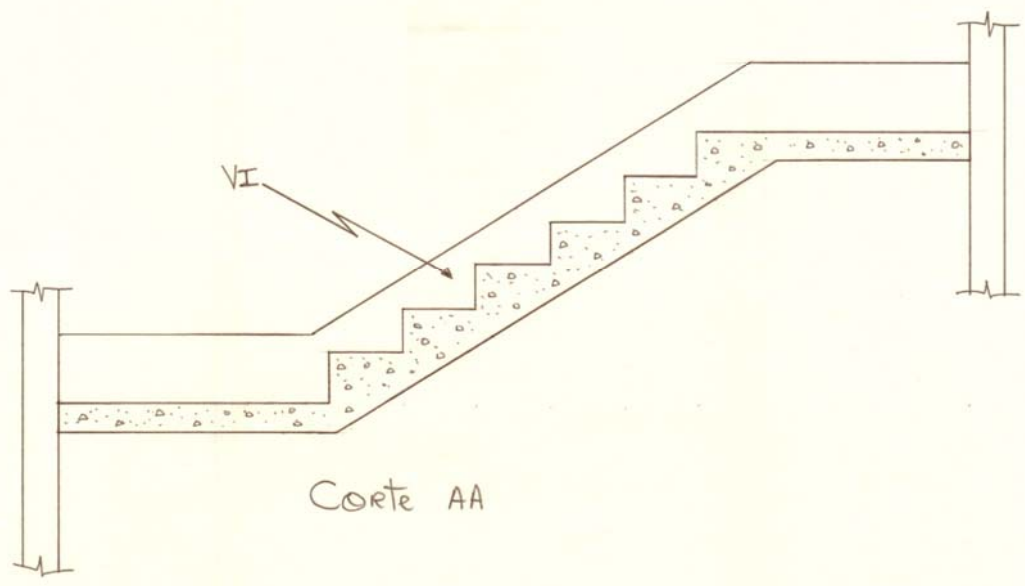


Quando o trecho entre os patamares aumenta muito, cai-se no caso das escadas em "C", vistas a seguir

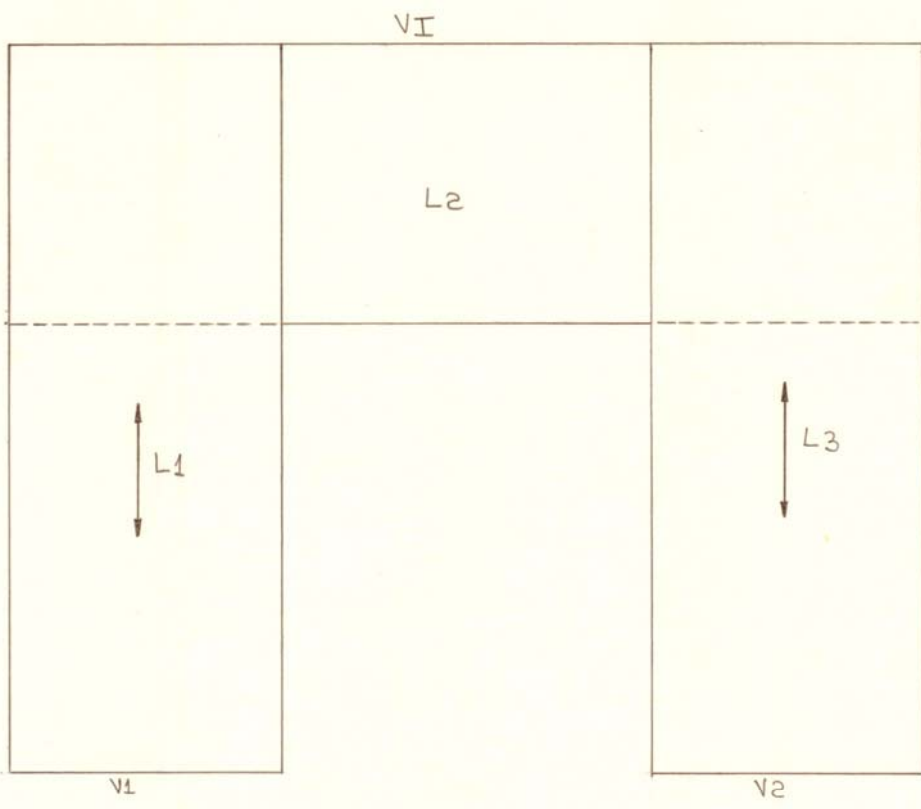
7. Escadas em "C" - esse tipo de escada é comumente executada com as duas vigas extremas e mais uma intermediária.



Com esses apoios pode-se dividir a escada nas lajes  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . A laje  $L_2$  é uma laje sobre três apoios, apoiada na VI e nas lajes  $L_1$  e  $L_3$ . As lajes  $L_1$  e  $L_3$  são armadas longitudinalmente, sendo calculadas para suportarem as cargas próprias e mais a reação de  $L_2$ . Para o detalhamento das armaduras valem as recomendações feitas para as escadas anteriores.

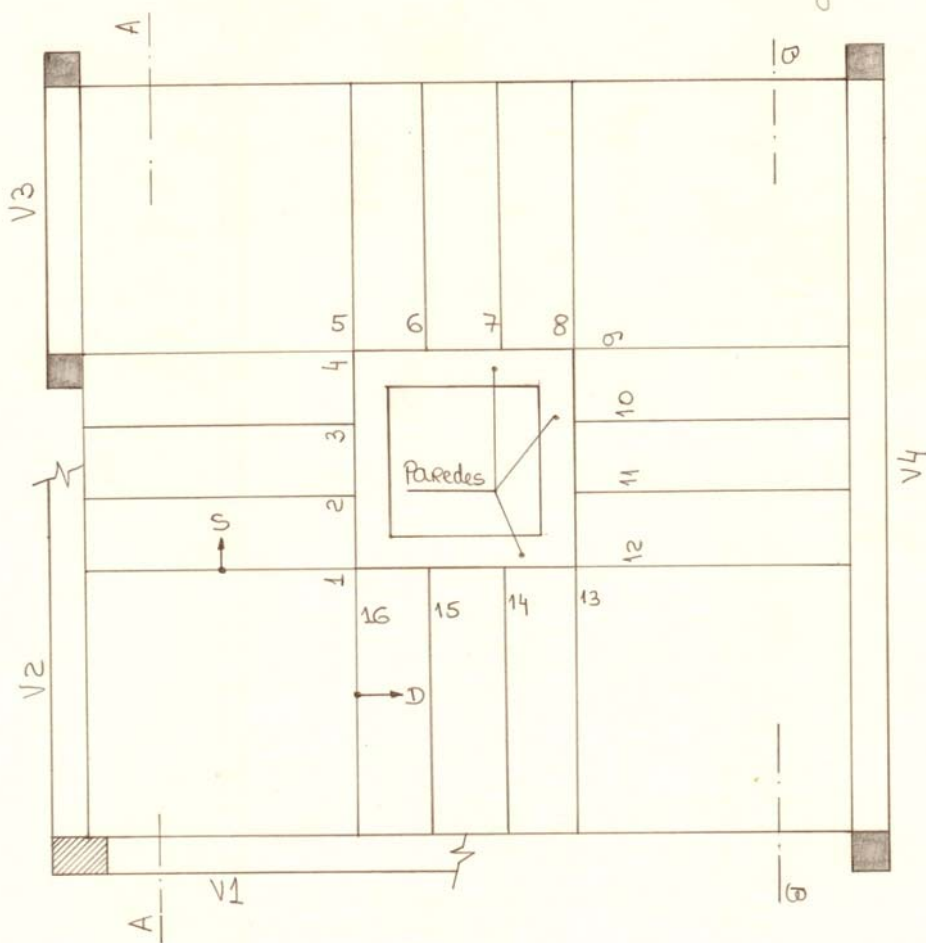


Corte AA



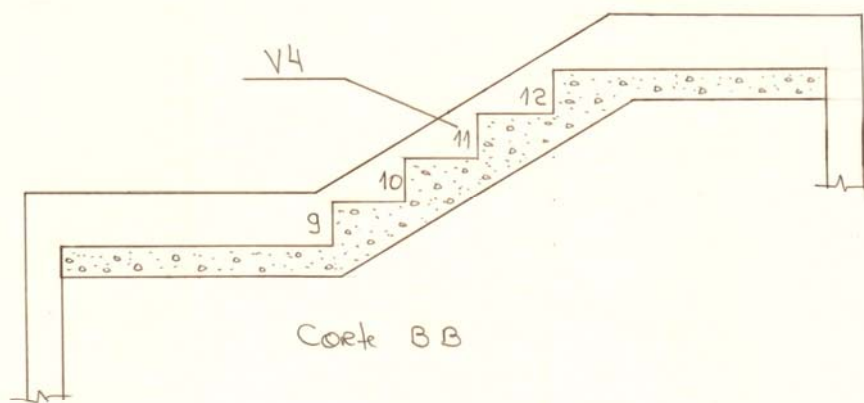
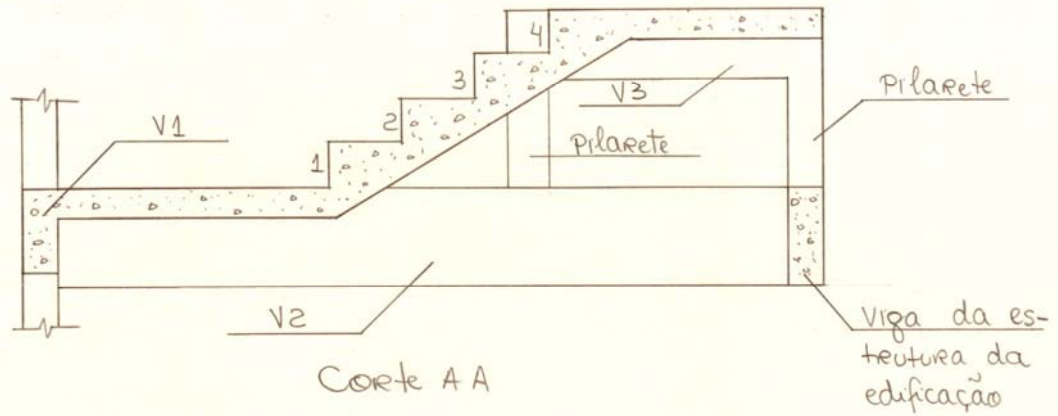
Esquema das lajes

8. Escadas em "O" - para esse tipo de escada diversas situações de apoio são possíveis. Para a escada com as vigas de apoio  $V_1, V_2, V_3$  e  $V_4$ , esquematizada abaixo, faz-se o cálculo dividindo-a nas lajes  $L_1, L_2, L_3$  e  $L_4$ . A Laje  $L_3$  é armada longitudinalmente, apoiada nas lajes  $L_1$  e  $L_2$ ; a Laje  $L_4$  é apoiada em três apoios:  $V_4, L_1$  e  $L_2$ ; as lajes  $L_1$  e  $L_2$  são armadas longitudinalmente.

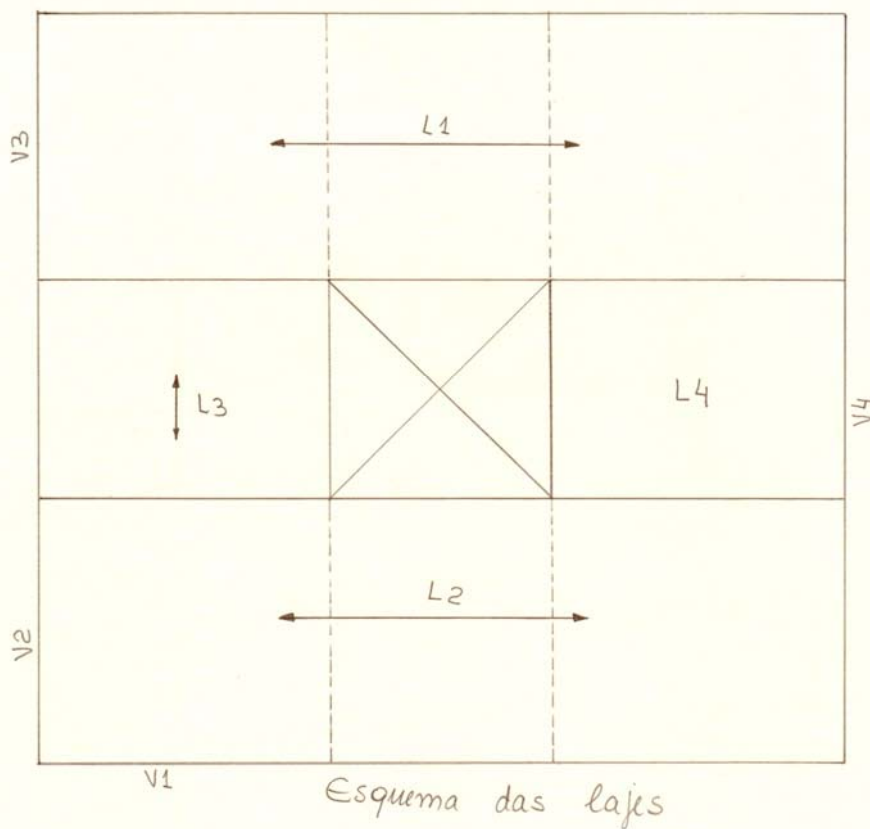


Normalmente faz-se uma estrutura independente na parte interna da escada para suportar as paredes. Quando isto não for conveniente pode-se dispensar tal estrutura e apoiar

as paredes nas lajes da escada, que devem então ser previstas para receber tais cargas.



Evidentemente outras condições de apoio são possíveis. Não se pretende aqui abarcar todas. Em vista do exposto até aqui facilmente se pode fazer a divisão da escada em lajes para cálculo dos esforços, quando as vigas de apoio estiverem em locais diferentes dos da escada exemplificada.

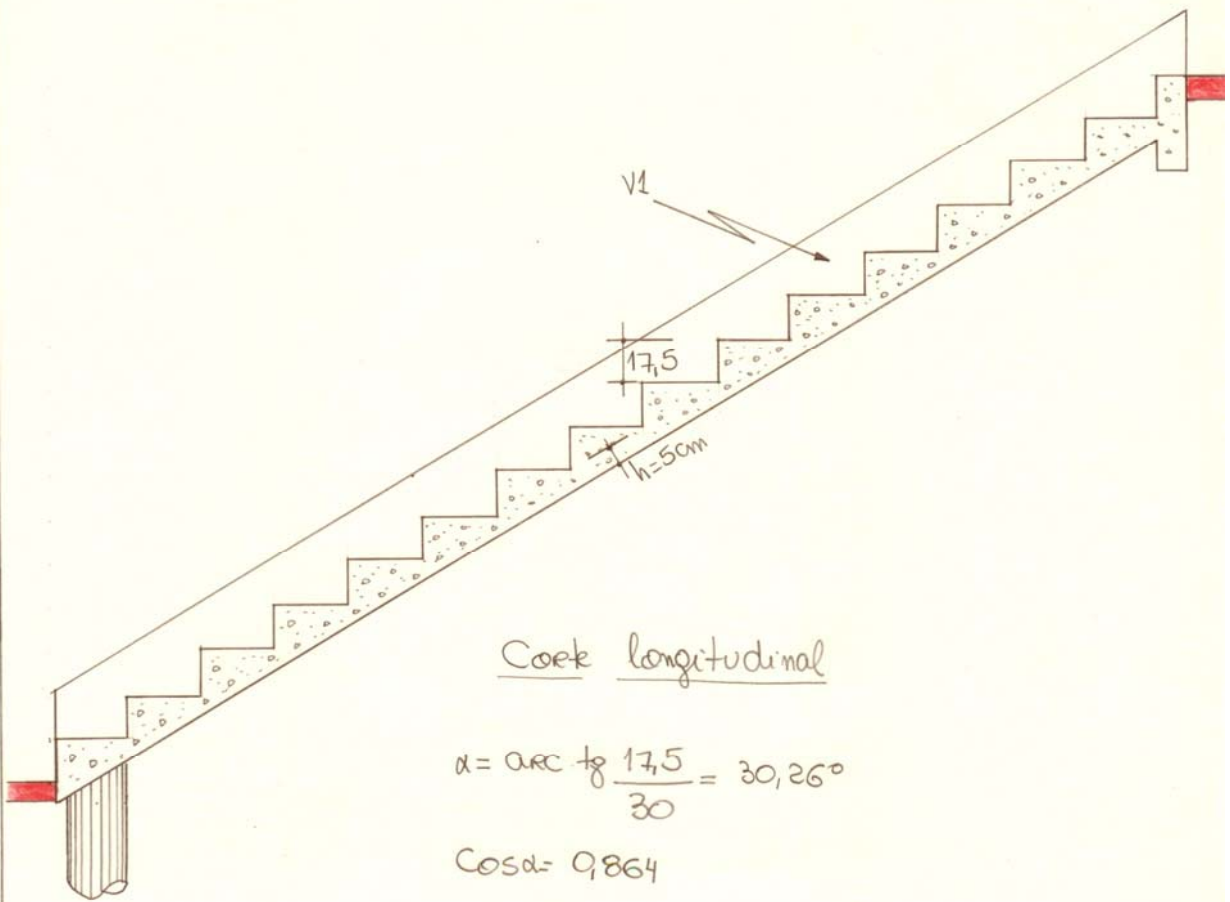
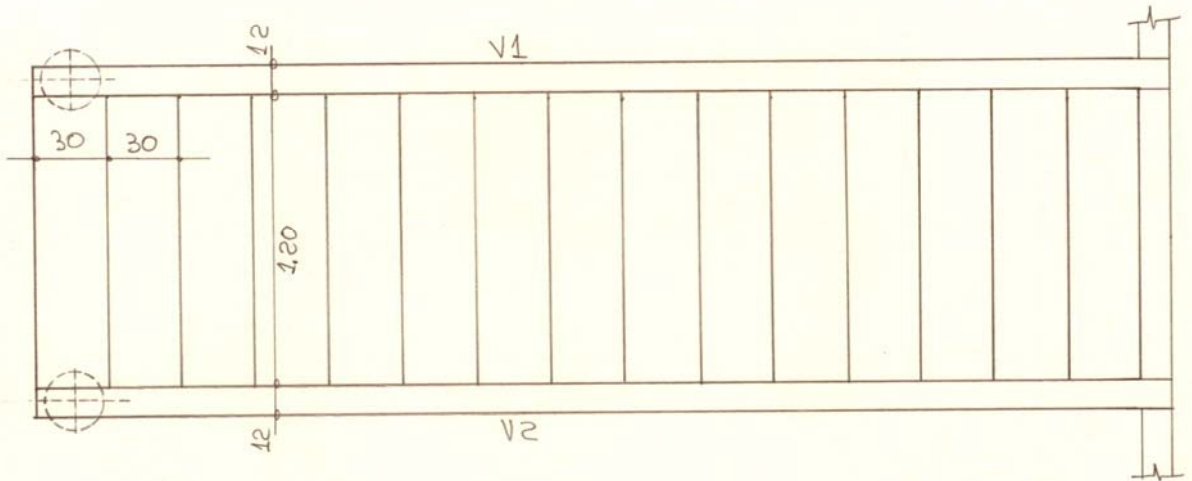


No caso da escada acima, a viga V1 embora exista (é necessária à estrutura da edificação) não é considerada, por ser desnecessária, na análise da escada.

Para detalhamento das armaduras valem as mesmas recomendações feitas para os tipos anteriores.

## 9. Exemplos

1º Exemplo: a escada abaixo faz parte de uma edificação Residencial. Detalhar as armaduras sendo dados:  $f_{ck} = 150 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$  e aço CA-60B.



- Avaliação de cargas:

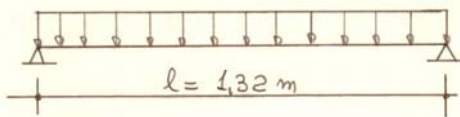
$$\text{Peso próprio} \rightarrow 2,5 \left( \frac{0,05}{0,864} + \frac{0,175}{2} \right) = 0,363 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{Revestimento} \rightarrow 0,080 \text{ tf/m}^2 \text{ (adotado)}$$

$$\text{Sobrecarga} \rightarrow 0,250 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{Carga total} = 0,693 \text{ tf/m}^2$$

- Determinação dos esforços - como se dispõe de duas vigas transversais a escada será armada transversalmente.


$$q' = q \cdot \cos^2 \alpha$$
$$q' = 0,693 \cdot 0,864^2 = 0,518 \text{ tf/m}$$

$$M_{\max} = \frac{0,518 \times 1,32^2}{8} = 0,113 \text{ tf} \cdot \text{m/m} = 11,3 \text{ tf} \cdot \text{cm/m}$$

- Determinação das armaduras

$$h_d = h + \frac{b \cdot \cos \alpha}{2} = 5 + \frac{17,5 \cdot 0,864}{2} = 12,56 \text{ cm}$$

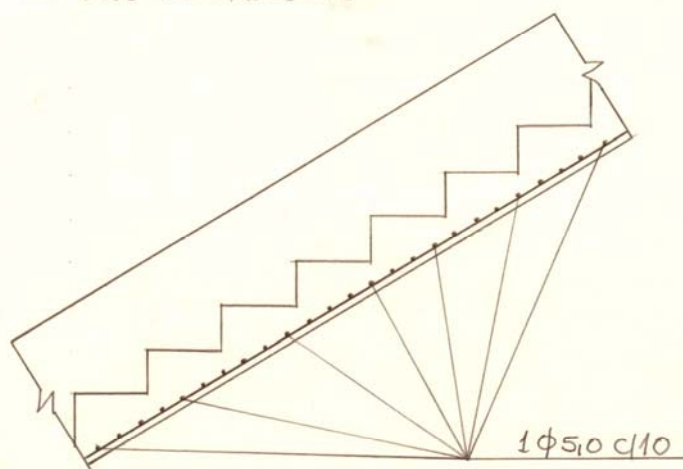
$$K_G = \frac{100 \times 11^2}{14,3} = 1070,8 \rightarrow K_3 = 0,274 \rightarrow A_s = \frac{0,274 \cdot 11,3}{11} = 0,28 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s_{\min}} = 0,15\% \cdot b_w \cdot h = \frac{0,15}{100} \cdot 100 \cdot 12,56 = 1,88 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (1 } \phi \text{ 5,0 c/10)}$$

$$\text{Armadura de distribuição (longitudinal)} = \begin{cases} 0,90 \text{ cm}^2/\text{m} \\ \frac{1}{5} \cdot 1,88 = 0,37 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$\text{Adotando } 0,90 \text{ cm}^2 \rightarrow 1 \phi \text{ 5,0 c/22}$$

- Esquema das armaduras



- Cargas nas vigas - as vigas V1 e V2 devem ser dimensionadas para resistir ao seu peso próprio, à alvenaria que porventura exista sobre as mesmas e às cargas da escada, que valem:  $\frac{0,693 \cdot 1,20}{2} = 0,416 \text{ t/m}$ . As cargas anteriores são cargas verticais por metro de projeção horizontal da viga.

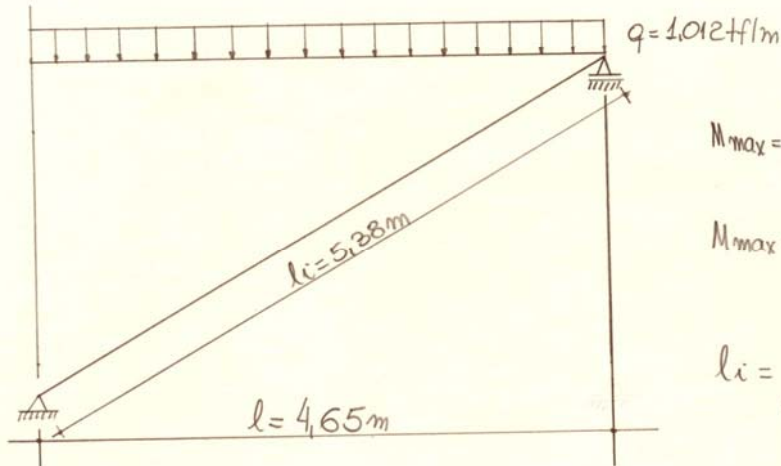
2º exemplo: dimensionar a mesma escada do exemplo anterior com apoios apenas nos extremos.

Nesse caso a escada é armada longitudinalmente e com isso a espessura da laje deve ser aumentada. Vamos de início adotar para a espessura da laje o valor  $h = \frac{l}{30}$ , sendo  $l$  o valor do vão na horizontal.

sendo  $l = 4,65 \text{ m} \rightarrow h = \frac{465}{30} = 15,5 \text{ cm} \approx 16,0 \text{ cm}$

- peso próprio  $\rightarrow 250 \left( \frac{0,16}{0,864} + \frac{0,175}{2} \right) = 0,682 \text{ t/m}^2$

- Carga total =  $0,682 + 0,080 \text{ (Revestimento)} + 0,250 \text{ (sobrecarga)} = 1,012 \text{ t/m}^2$



$$M_{\max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{1,012 \cdot 4,65^2}{8}$$

$$M_{\max} = 2,735 \text{ t} \cdot \text{m/m}$$

$$l_i = \frac{l}{\cos \alpha} = 5,38 \text{ m}$$

- Armaduras

$$b_w = 100 \text{ cm}$$

$$d = 16 - e = 14 \text{ cm}$$

$$K_g = \frac{100 \times 14^2}{273,5} = 71,66 \rightarrow K_3 = 0,308 \rightarrow A_s = 6,017 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (Aço CA-60B)}$$

$$\text{p/ aço CA-50B} \rightarrow K_3 = 0,369 \rightarrow A_s = 7,21 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (1}\phi\text{10 c/11cm)}$$

- A espessura inicialmente adotada é satisfatória. Se trabalharmos no limite podemos diminuir a espessura para 14 cm, obtendo então um  $A_s = 8,34 \text{ cm}^2/\text{m}$  (1 $\phi$ 10 c/9,6cm)

- Para armadura de distribuição o valor  $0,90 \text{ cm}^2/\text{m}$  é satisfatório, não sendo necessário adotar o valor 1/5 da armadura principal.

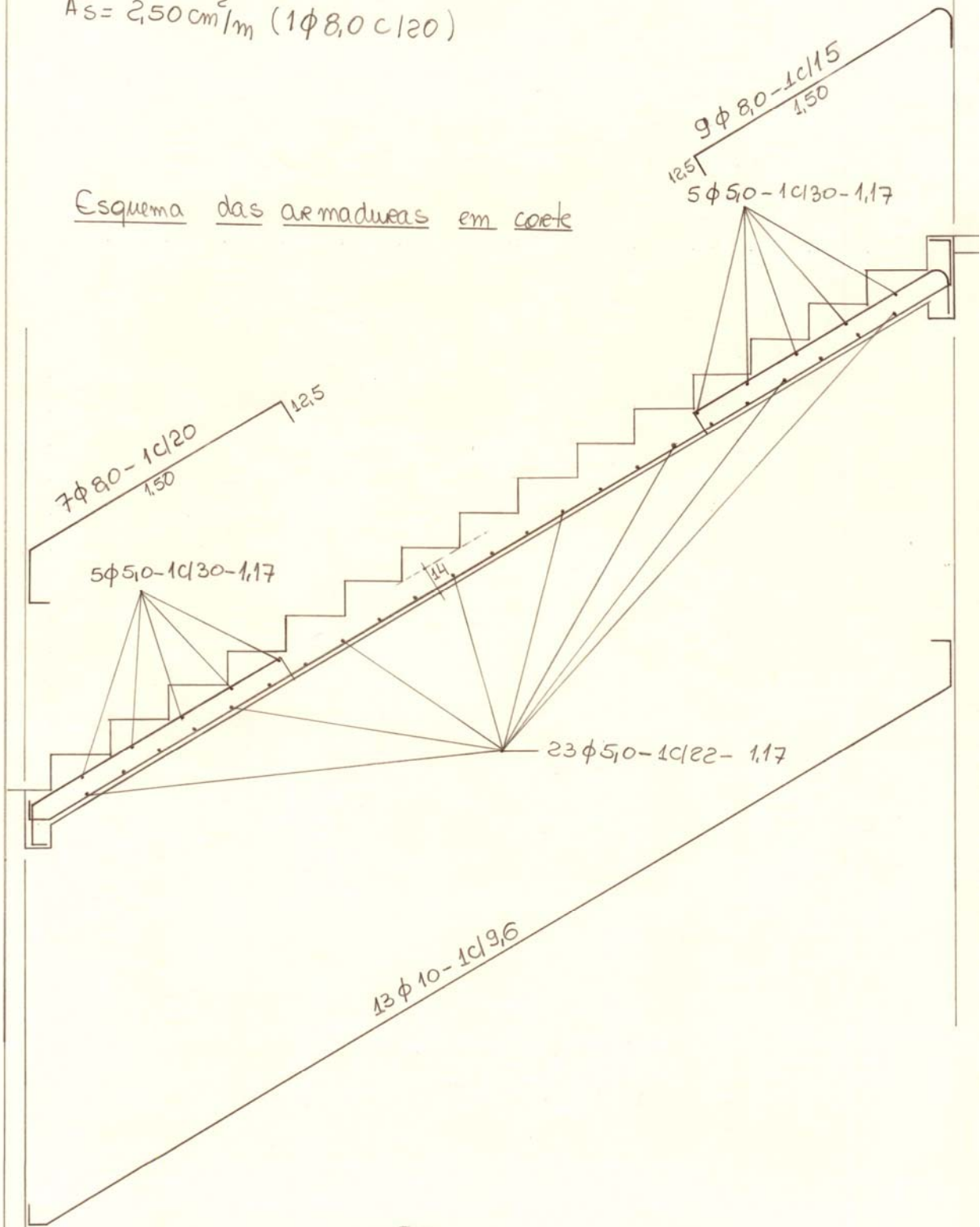
- Armaduras negativas: junto à viga superior será adotado

o valor  $A_s = 0,40 \cdot A_s = 0,40 \cdot 8,34 = 3,34 \text{ cm}^2/\text{m}$  ( $1\phi 8,0 \text{ c}15$ )

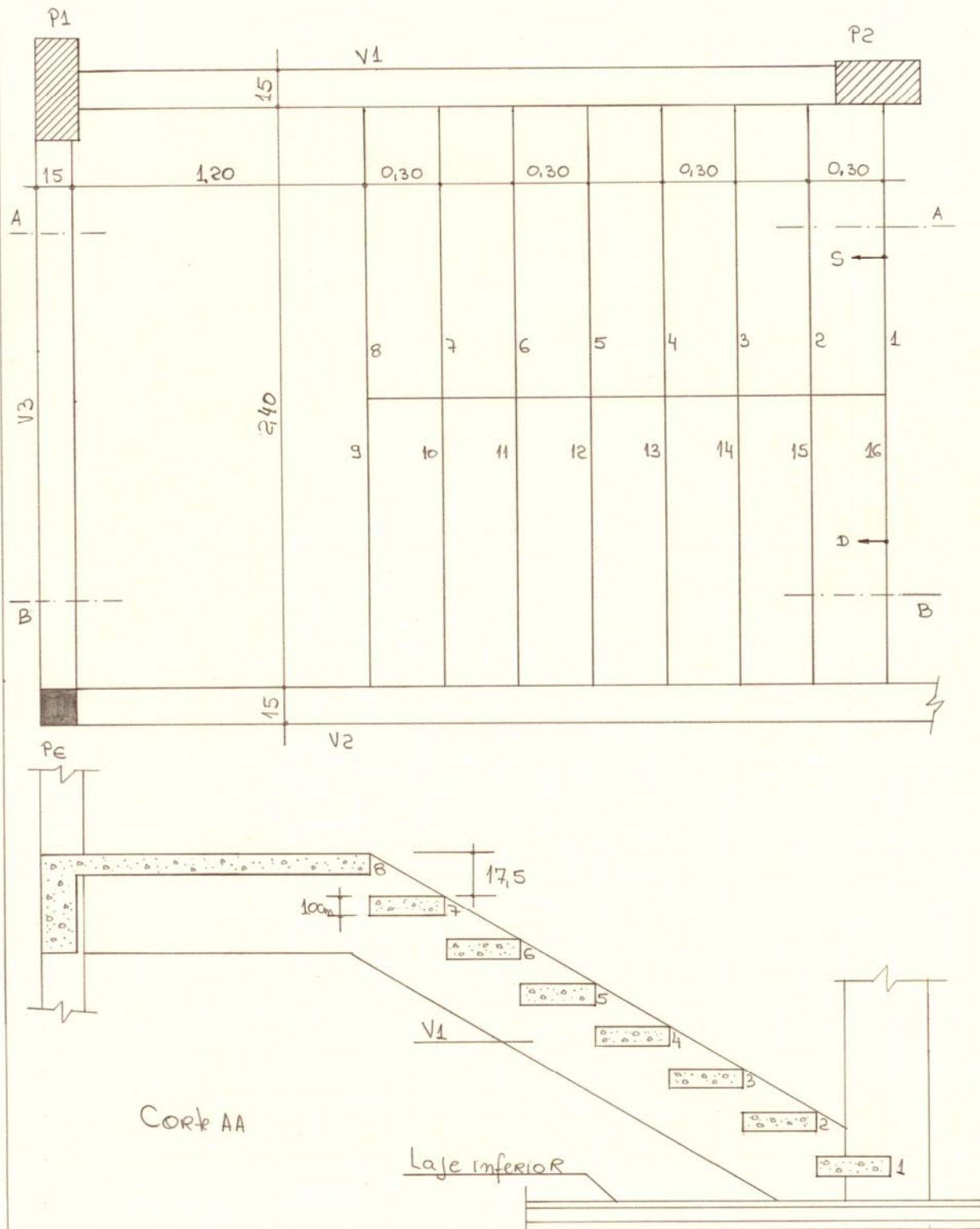
Junto à viga inferior será adotado o valor  $A_s = 0,30 \cdot 8,34$

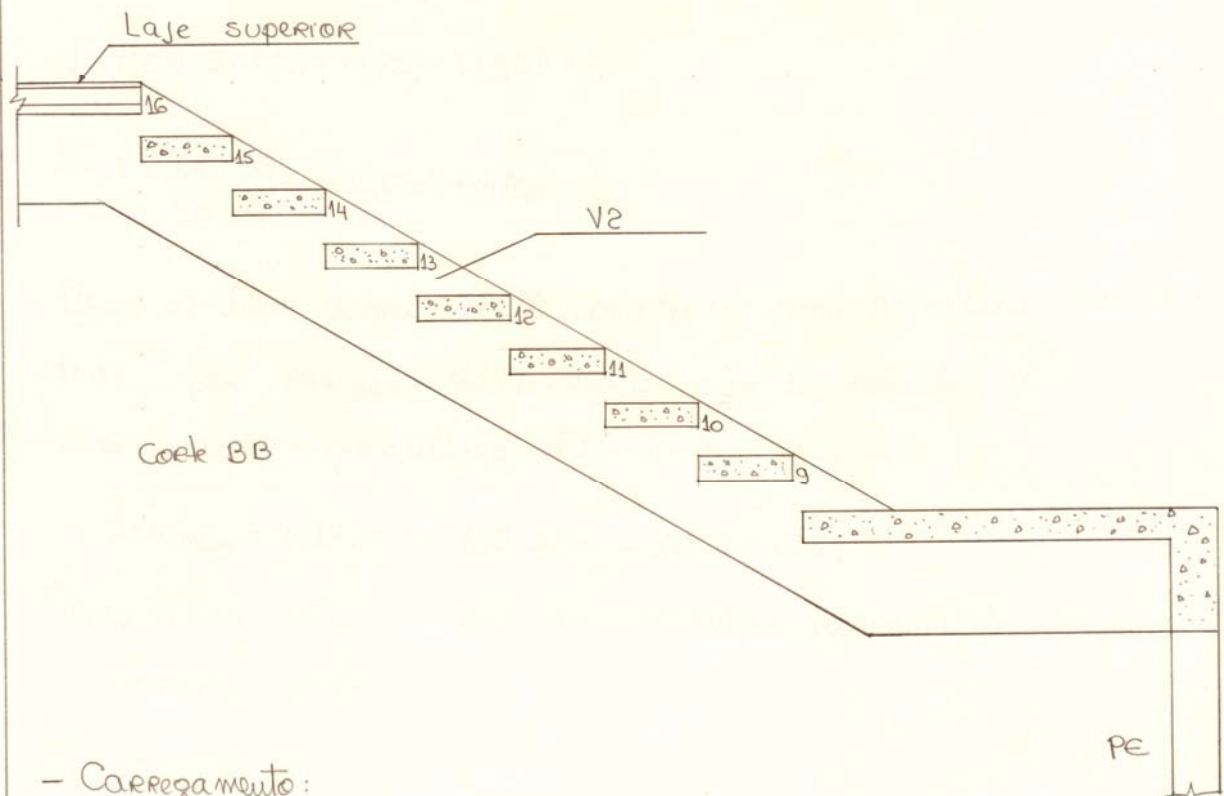
$A_s = 2,50 \text{ cm}^2/\text{m}$  ( $1\phi 8,0 \text{ c}120$ )

Esquema das armaduras em coque



3º exemplo: dimensionar e detalhar as armaduras da escada abaixo, constituída por degraus isolados, e revestida com madeira. São dados:  $f_{ck} = 150 \text{ kgf/cm}^2$  e aço CA-50B.





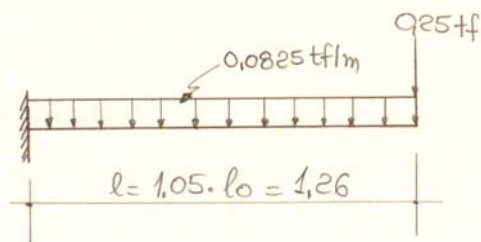
- Carregamento:

Os degraus, por serem isolados, devem ser verificados para o peso próprio, para o revestimento e para uma carga concentrada de  $0,25 \text{ tf}$  na posição mais desfavorável.

$$\text{peso próprio} = 0,30 \times 0,10 \times 2,50 = 0,075 \text{ tf/m}$$

$$\text{Revestimento} = 0,30 \times 0,025 \times 1,00 = 0,0075 \text{ tf/m}$$

O revestimento considerado foi um peanção de madeira ( $1 \text{ pe}^2$ , cujo peso específico vale  $1,0 \text{ tf/m}^3$ ) com  $2,5 \text{ cm}$  de espessura.



$$M = \frac{0,0825 \times 1,26^2}{2} + 0,25 \times 1,26 = 0,380 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

$$K_6 = \frac{30 \times 8,0^2}{38} = 57,04 \rightarrow K_3 = 0,401$$

$$A_s = 490 \text{ cm}^2 \quad (4 \phi 8,0)$$

Esforço cortante:

$$V = 0,0825 \cdot 1,26 + 0,25 = 0,354 \text{ tf}$$

$$\bar{\sigma}_{wd} = \frac{1,4 \cdot 354}{30 \cdot 8} = 2,065 \text{ kgf/cm}^2$$

Para o valor acima basta considerar uma armadura mínima dada por  $A_{sw, \min} = 0,14\% \cdot b_w \cdot s$ , não se tomando para  $b_w$  valor maior que a altura útil -  $d$  - da peça.

$$A_{sw, \min} = 0,14 \cdot 80 = 1,12 \text{ cm}^2/\text{m} - 1 \phi 3,2 \text{ c}/14$$

Nesse caso não se respeitou a bitola mínima de 5mm e espaçamento máximo de  $d/2 = 4 \text{ cm}$ , que são exagerados para a peça em estudo.

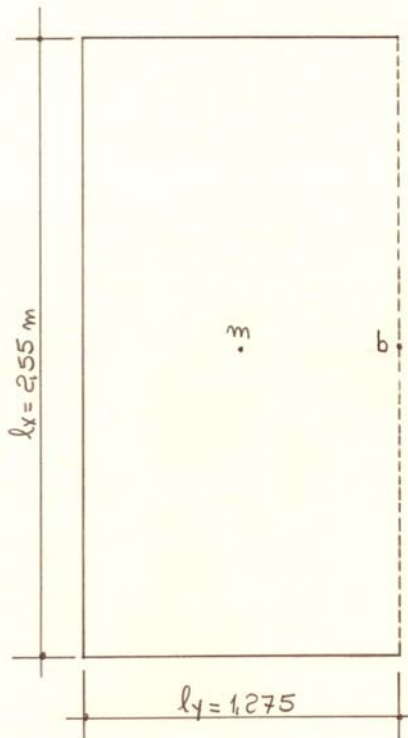
#### - Cálculo do patamar

O patamar é uma laje com três lados operados e um livre. Esse tipo de laje é facilmente calculada através de tabelas próprias. Como exemplo dessas tabelas pode-se citar as contidas no Manual do Engenheiro, 7º volume, 2º tomo, da Editora Globo ou no livro Novo Curso Prático do Concreto Armado, volume 3, do autor do prof. Aderson Moreira da Rocha. Em anexo são apresentadas as duas tabelas acima mencionadas.

Para o patamar as cargas a considerar são as seguintes:

$$\begin{array}{l} - \text{peso próprio} = 0,10 \cdot 2,50 = 0,250 \text{ tf/m}^2 \\ - \text{Revestimento} = 0,025 \cdot 1,00 = 0,025 \text{ tf/m}^2 \\ - \text{Sobrecarga} = 0,250 \\ \hline 0,525 \text{ tf/m}^2 \end{array}$$

De acordo com a tabela do Manual do Engenheiro tem-se:



$$\frac{l_y}{l_x} = \frac{1,275}{2,55} = 0,50$$

$$Q = q \cdot l_x \cdot l_y = 0,525 \cdot 1,275 \cdot 2,55 = 1,707 \text{ tf}$$

$$M_{xm} = \frac{Q}{m_{xm}} = \frac{1,707}{18,2} = 0,094 \text{ tf}\cdot\text{m/m}$$

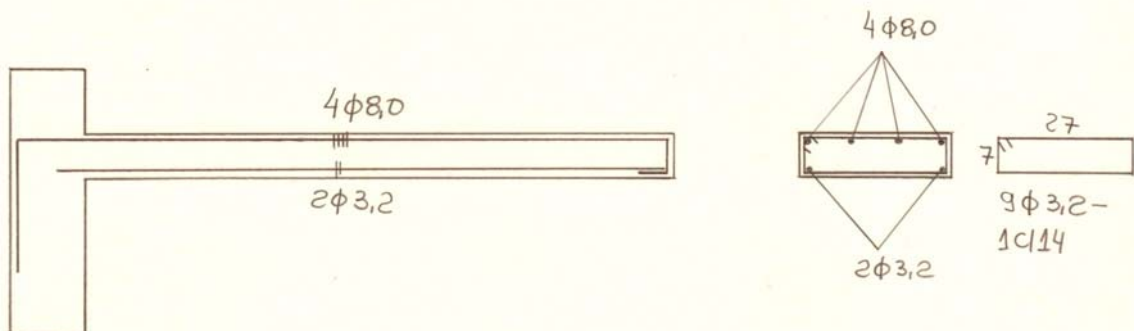
$$M_{ym} = \frac{Q}{m_{ym}} = \frac{1,707}{20} = 0,085 \text{ tf}\cdot\text{m/m}$$

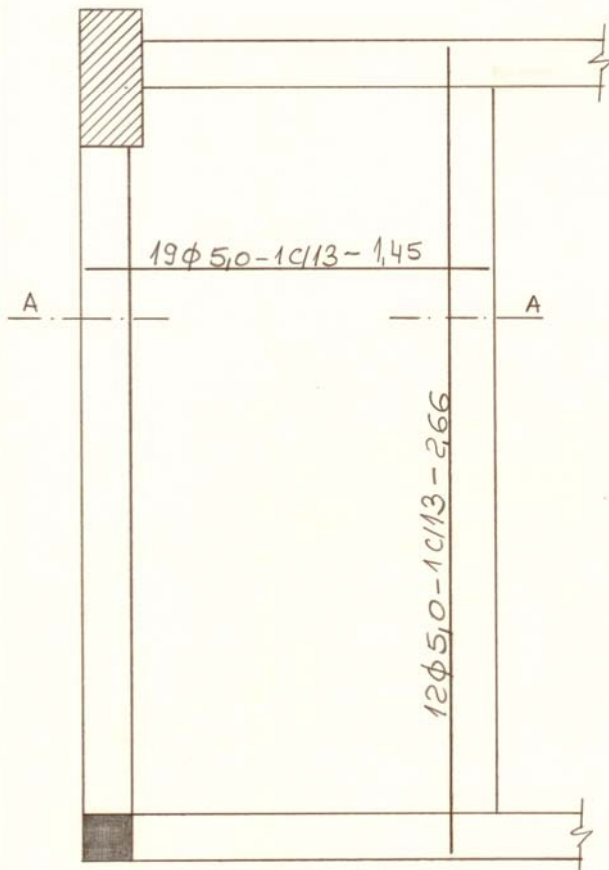
$$M_{xb} = \frac{Q}{m_{xb}} = \frac{1,707}{10,0} = 0,171 \text{ tf}\cdot\text{m/m}$$

Para os esforços acima basta uma armadura mínima.  
Adotando  $A_{s_{min}} = 0,15\% \cdot b_w \cdot h$  tem-se:

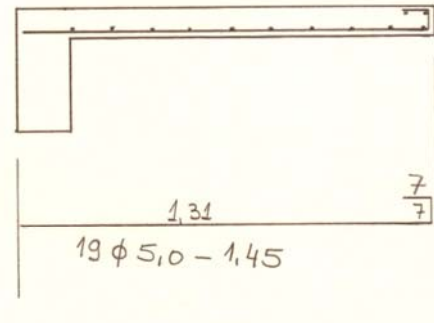
$$A_{s_{min}} = \frac{0,15}{100} \cdot 100 \cdot 10 = 1,50 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (1\phi 50 \text{ C/13})$$

- Detalhamento das armaduras



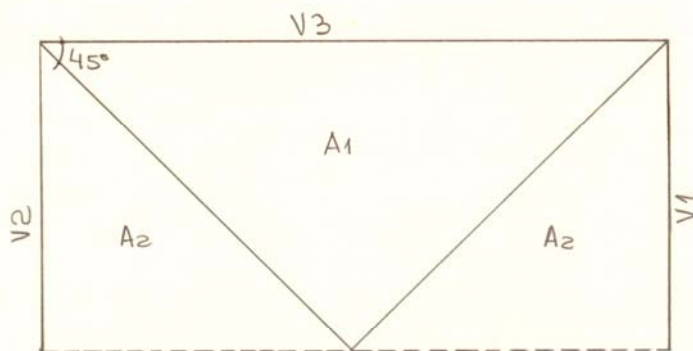


CORT AA



- Cargas da escada nas vigas

- cargas do patamar - usa-se o procedimento das linhas de ruptura, conforme esquema abaixo



$$A_1 = \frac{2,55 \cdot 1,275}{2} = 1,626 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{1,275 \cdot 1,275}{2} = 0,813 \text{ m}^2$$

$$R_{V3} = \frac{0,525 \cdot 1,626}{2,55} = 0,335 \text{ tf/m}$$

$$R_{V1} = R_{V2} = \frac{0,525 \cdot 0,813}{1,275} = 0,335 \text{ tf/m}$$

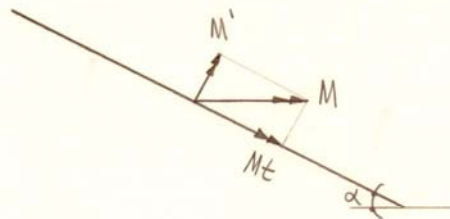
- Cargas dos degraus - para cálculo das vigas não se considera a carga de 0,250 tf aplicada em cada degrau mas sim uma carga uniformemente distribuída de 0,250 tf/m<sup>2</sup>.

O valor da carga vertical em V1 e V2 vale então:

$$0,525 \cdot 1,20 = 0,63 \text{ tf/m}$$

O momento aplicado pelos degraus vale  $\frac{0,525 \cdot 1,26^2}{2} = 0,417 \frac{\text{tf}\cdot\text{m}}{\text{m}}$

Esse momento age num plano vertical e é dado por metro de projeção horizontal. Para obter o valor por metro linear ao longo do eixo inclinado da viga basta multiplicar pelo cosseno do ângulo. Como o momento age em um plano vertical e a viga é inclinada, é preciso ainda decompor o momento em duas componentes, uma que realiza uma torção na viga e outra que flexiona lateralmente a mesma.



$$\alpha = \arctg \frac{17,5}{30} = 30,26^\circ$$

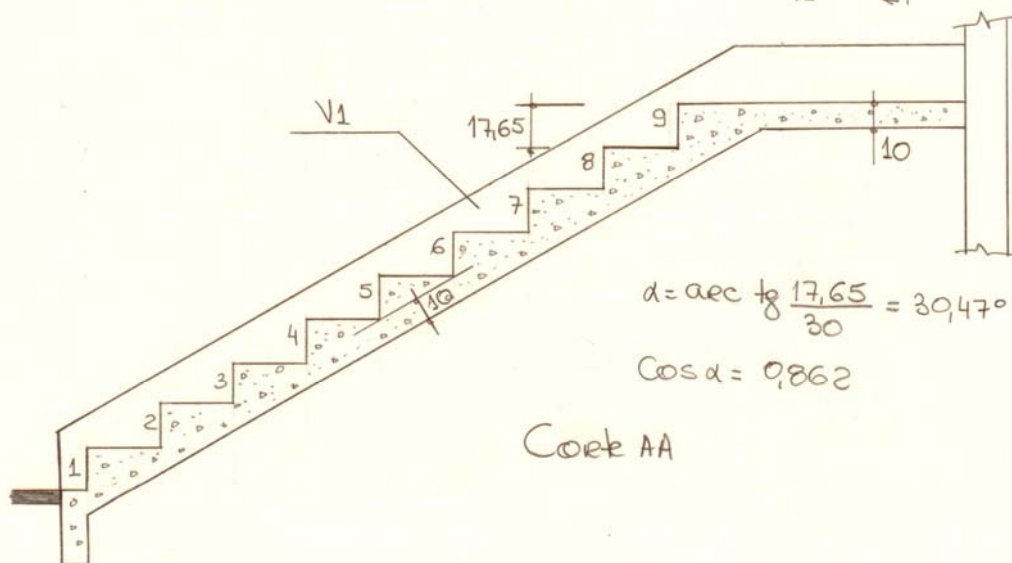
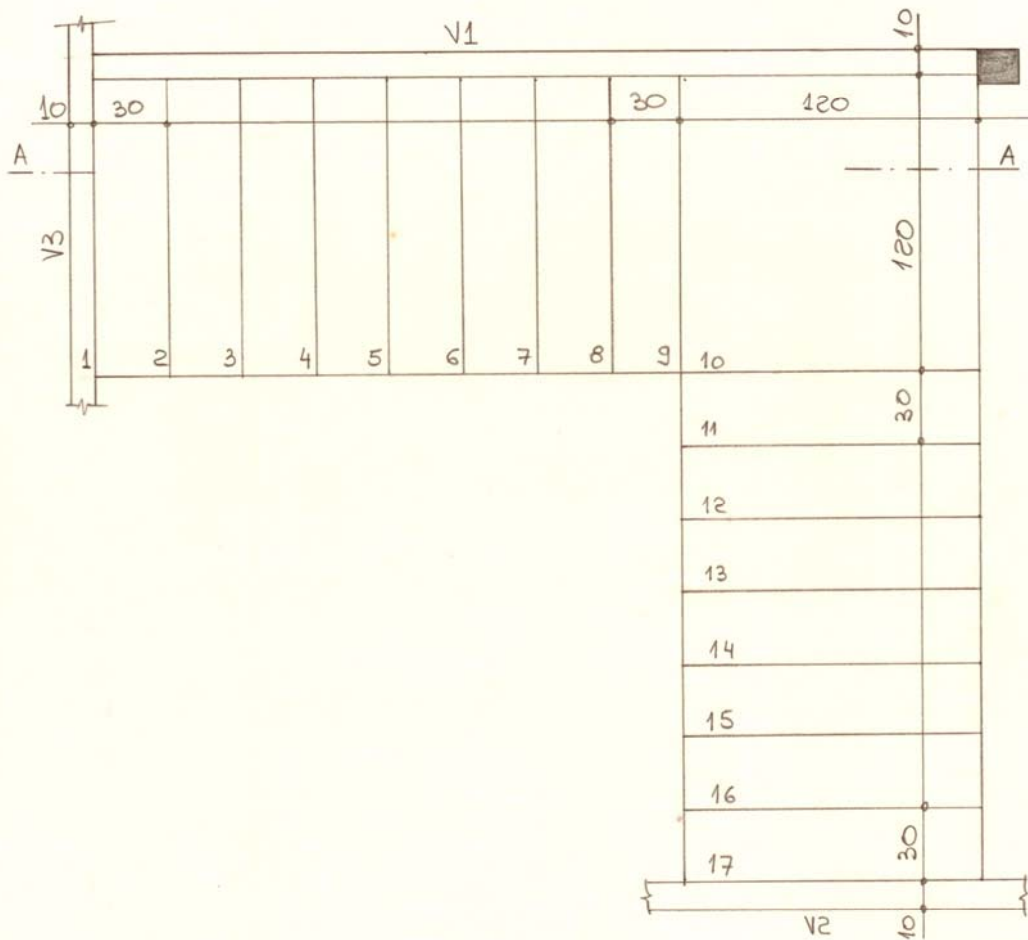
$$\cos \alpha = 0,863$$

$$M = 0,417 \cdot 0,863 = 0,360 \text{ tf}\cdot\text{m/m}$$

$$M_t = 0,360 \cdot 0,863 = 0,310 \text{ tf}\cdot\text{m/m}$$

$$M' = 0,360 \cdot 0,504 = 0,181 \text{ tf}\cdot\text{m/m}$$

4º exemplo: dimensionar e detalhar as armaduras da escada abaixo que faz parte de uma edificação com acesso público.  
 São dados:  $f_{ck} = 150 \text{ kgf/cm}^2$  e Aço CA-50B.



- Carregamento

- Peso próprio:  $\left(\frac{0,10}{0,862} + \frac{0,1765}{2}\right) \cdot 2,5 = 0,511 \text{ tf/m}^2$  (nos degraus)

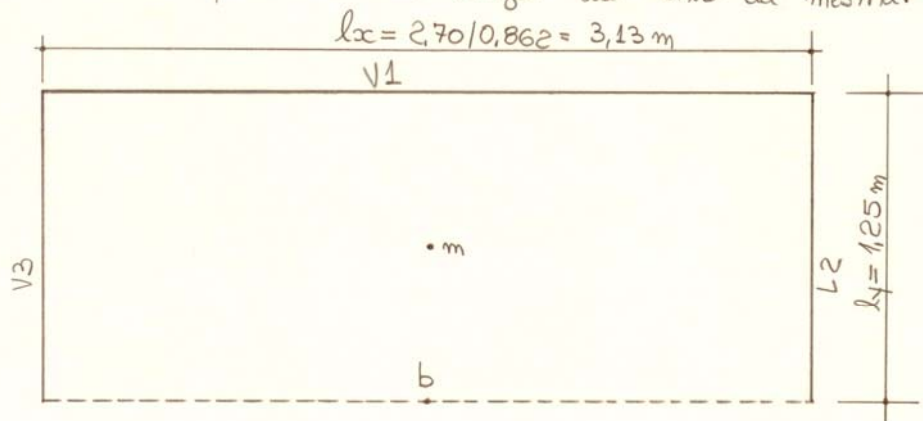
$0,10 \cdot 2,5 = 0,250 \text{ tf/m}^2$  (no patamae)

- Revestimento =  $0,100 \text{ tf/m}^2$  (adotado na falta de maiores dados)

- Sobrecarga =  $0,300 \text{ tf/m}^2$  (escada com acesso público)

- Determinação dos esforços - o esquema da escada e' o indicado na página 14, ou seja: uma laje sobre três apoios e outra armada longitudinalmente.

Para o cálculo da laje L1, apoiada sobre três apoios, deve-se tomar a carga perpendicular ao plano da escada e o comprimento ao longo do eixo da mesma.



$$\frac{l_y}{l_x} = \frac{1,25}{3,13} = 0,40$$

$$q_1 = q \cdot \cos^2 \alpha = 0,911 \cdot 0,862^2 = 0,677 \text{ tf/m}^2$$

$$Q = 0,677 \cdot 1,25 \cdot 3,13 = 2,65 \text{ tf}$$

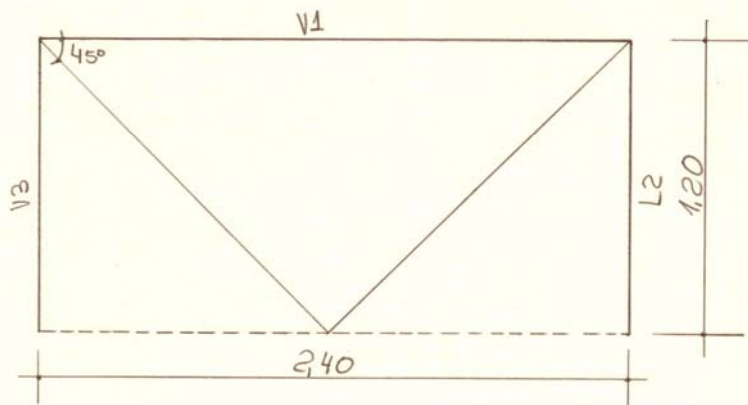
$$M_{xm} = \frac{2,65}{21,4} = 0,124 \text{ tf} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{xb} = \frac{2,65}{10,6} = 0,250 \text{ tf} \cdot \text{m/m}$$

$$M_{ym} = \frac{2,65}{20,4} = 0,130 \text{ tf} \cdot \text{m/m}$$

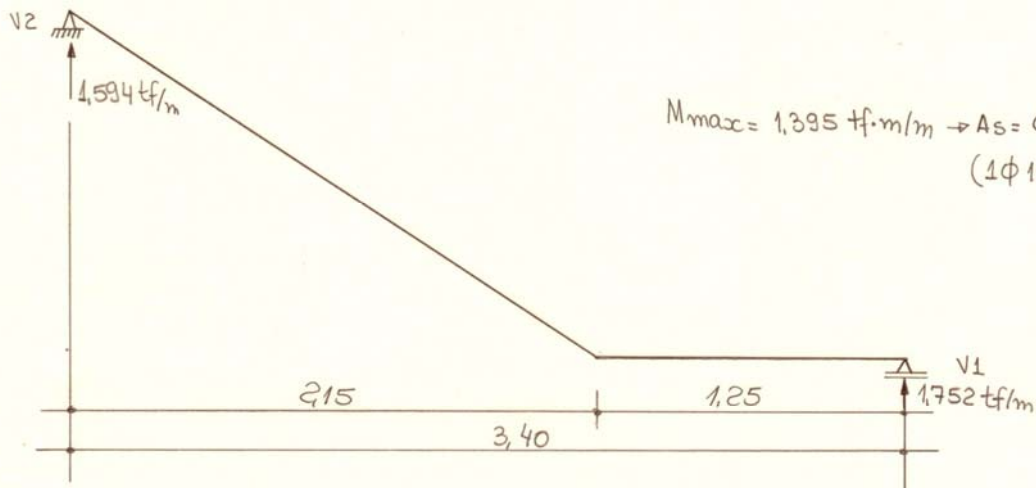
Para o maior momento,  $M_{xb} = 0,250 \text{ tf}\cdot\text{m}/\text{m}$ , e' necessaria uma armadura de  $0,98 \text{ cm}^2/\text{m}$ , inferior à minima que e' de  $1,50 \text{ cm}^2/\text{m}$ . Tendo em vista esse fato pode-se diminuir a espessura da laje L1. No presente exemplo isso não sera' feito.

Para o cálculo da laje L2, armada longitudinalmente, e' necessario considerar a carga que a L1 descarrega na mesma. Para isso considera-se a projeção horizontal da L1, pois as cargas são verticais, por  $\text{m}^2$  de projeção horizontal.



$$q = 0,911 \text{ tf}/\text{m}^2$$

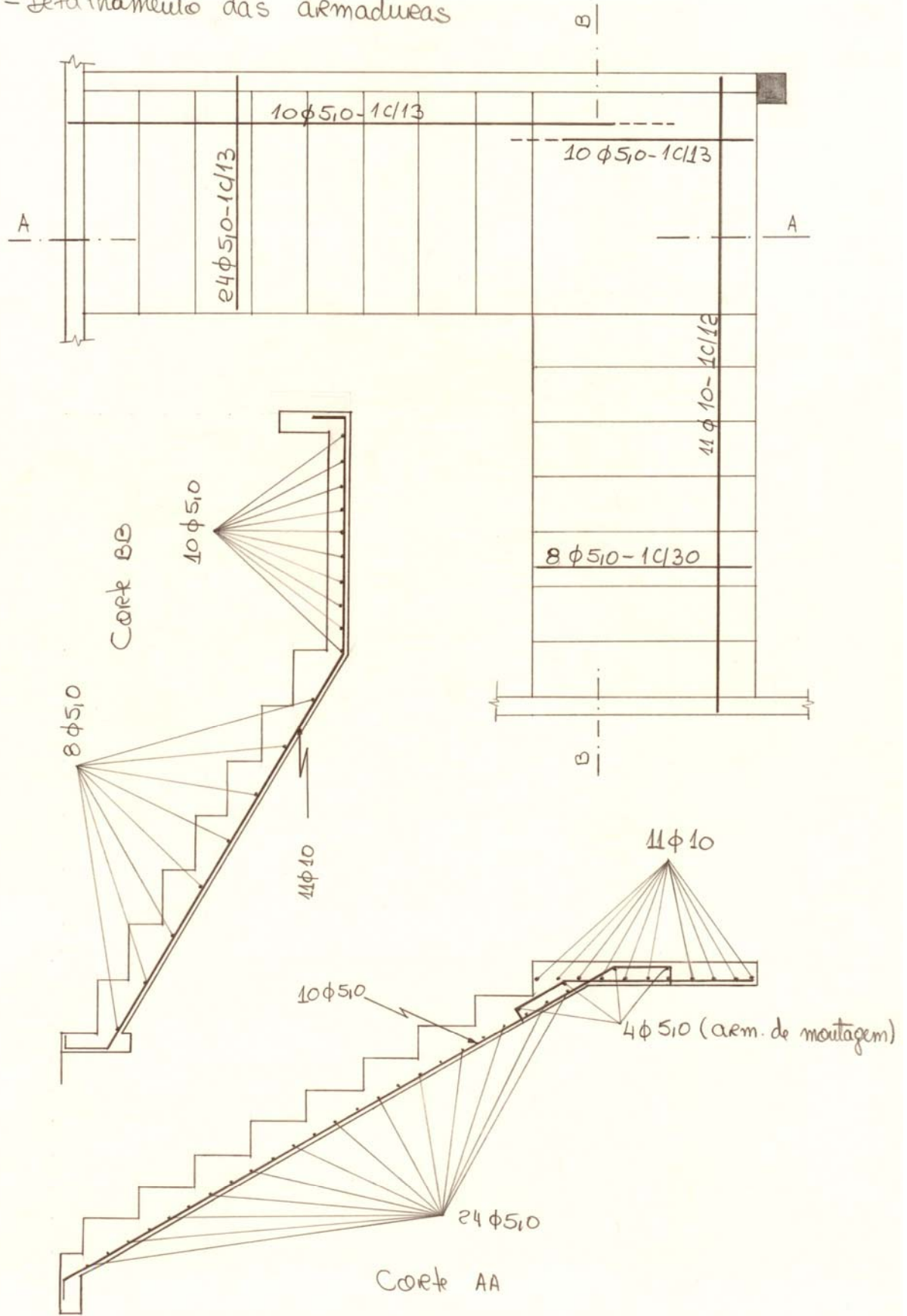
$$R_{V1} = R_{V3} = R_{L2} = 0,547 \text{ tf}/\text{m}$$



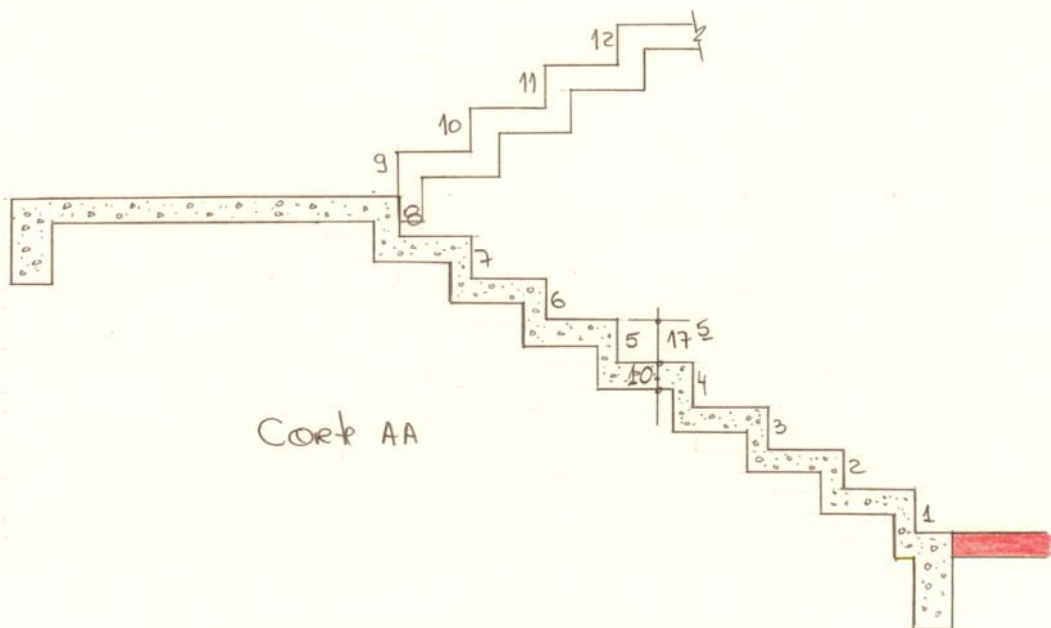
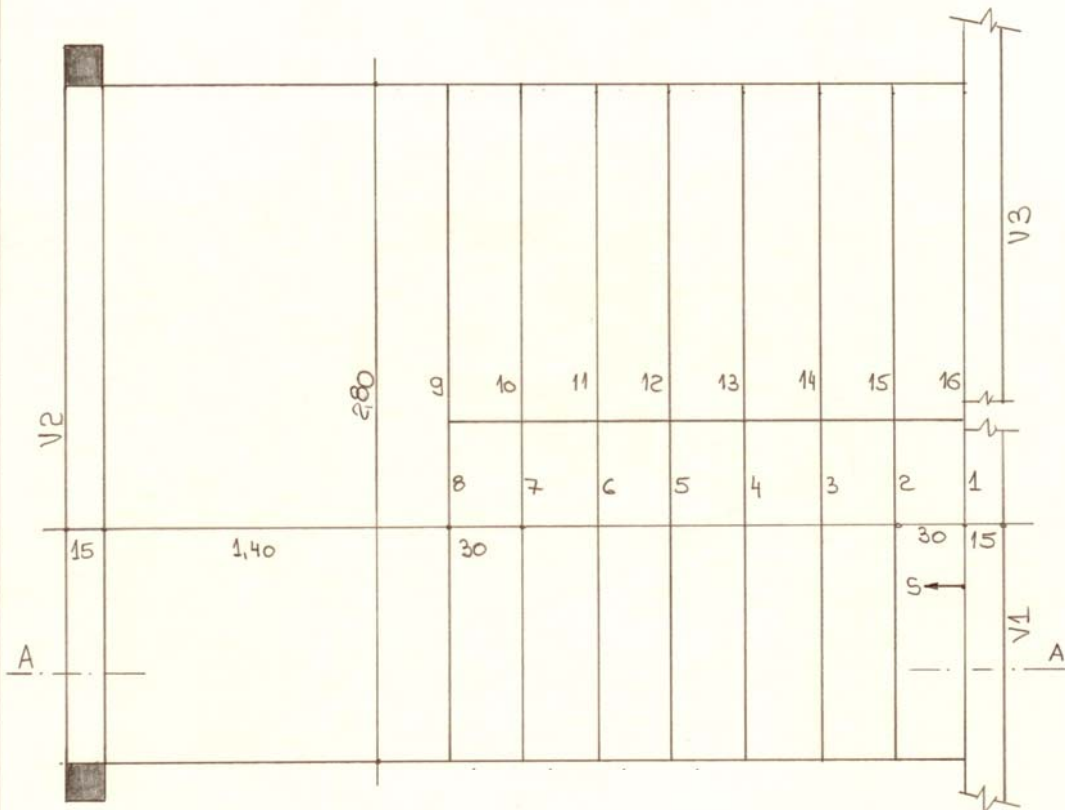
$$M_{max} = 1,395 \text{ tf}\cdot\text{m}/\text{m} \rightarrow A_s = 6,50 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$(1\phi 10 \text{ c/12})$$

- Detalhamento das armaduras



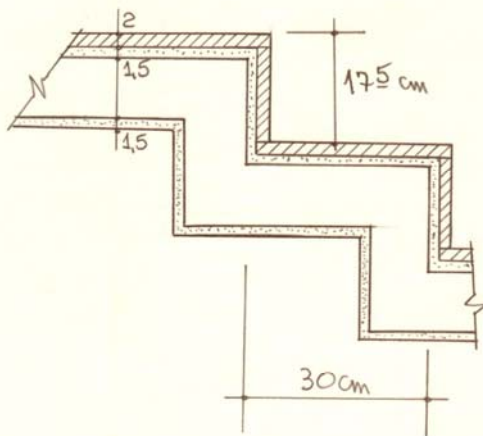
5º exemplo - a escada abaixo esquematizada faz parte de um banco e tem revestimento em mármore. Determinar as armaduras sendo dados:  $f_{ck} = 150 \text{ kgf/cm}^2$  e aço CA-50A



- Carga nos degraus

$$\text{- peso próprio} = \frac{(0,10 \cdot 0,30 + 0,10 \cdot 0,175) \cdot 2,50}{0,30} = 0,396 \text{ tf/m}^2$$

- Revestimento - Será considerado um Revestimento de argamassa de cimento, cal e areia, na parte inferior, com espessura de 1,5cm; uma camada de argamassa de assentamento, de cimento e areia, com espessura de 1,5cm; e placas de mármore de 2cm de espessura.



argamassa de revestimento:

$$0,015 \cdot (0,30 + 0,175) \cdot 1,9 = 0,014 \text{ tf}$$

argamassa de assentamento:

$$0,015 \cdot (0,30 + 0,175) \cdot 2,1 = 0,015 \text{ tf}$$

mármore:

$$0,02 \cdot (0,30 + 0,175) \cdot 2,8 = 0,027 \text{ tf}$$

$$\text{total} \quad \underline{\quad 0,056 \text{ tf}} \quad$$

A carga acima foi calculada para um trecho de 30 cm; para obter a carga por metro quadrado de projeção horizontal basta dividir por 0,30 m.

$$\text{Carga de revestimento} = \frac{0,056}{0,30} = 0,187 \text{ tf/m}^2$$

- Sobrecarga - como se trata de uma escada de uma edificação com acesso público o valor a considerar é de 300 kgf/m<sup>2</sup>

- Carga no patamar

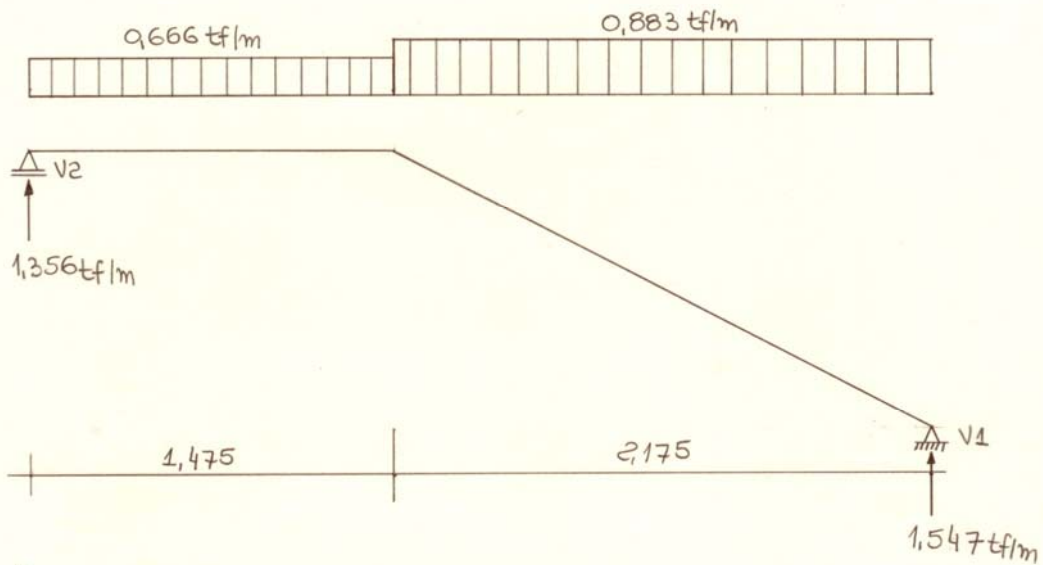
- peso próprio =  $910 \cdot 2,50 = 0,250 \text{ tf/m}^2$

- Revestimento =  $0,015 \cdot (1,9 + 2,1) + 902 \cdot 2,8 = 0,116 \text{ tf/m}^2$

- sobrecarga =  $0,300 \text{ tf/m}^2$

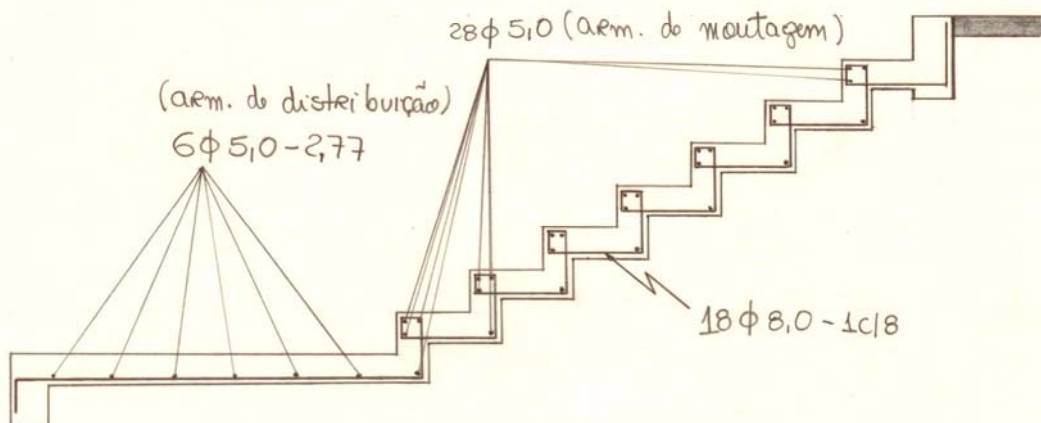
total =  $0,666 \text{ tf/m}^2$

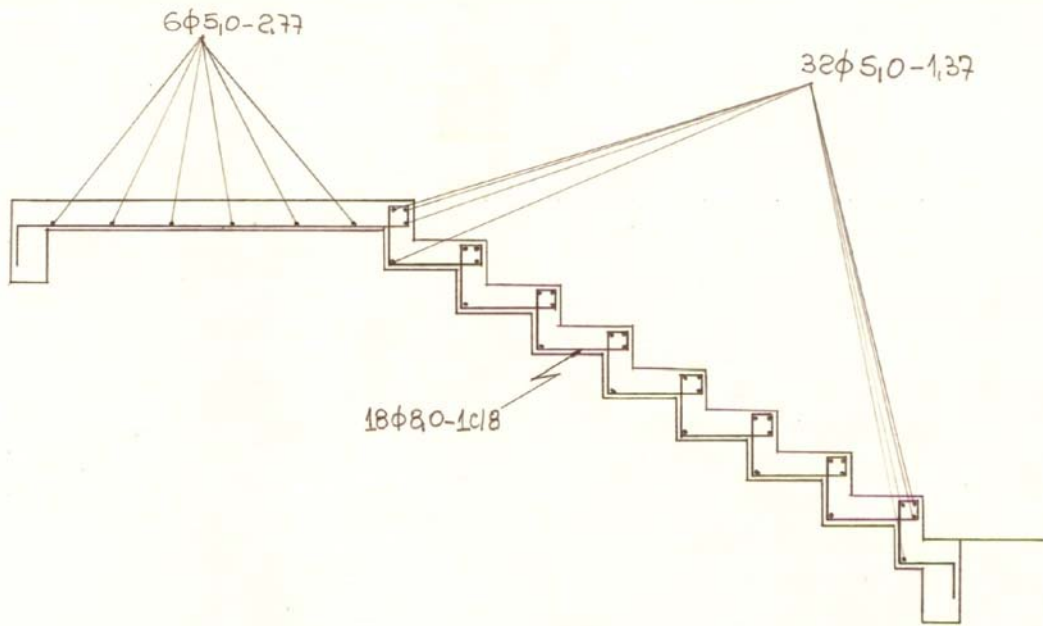
- Esforços



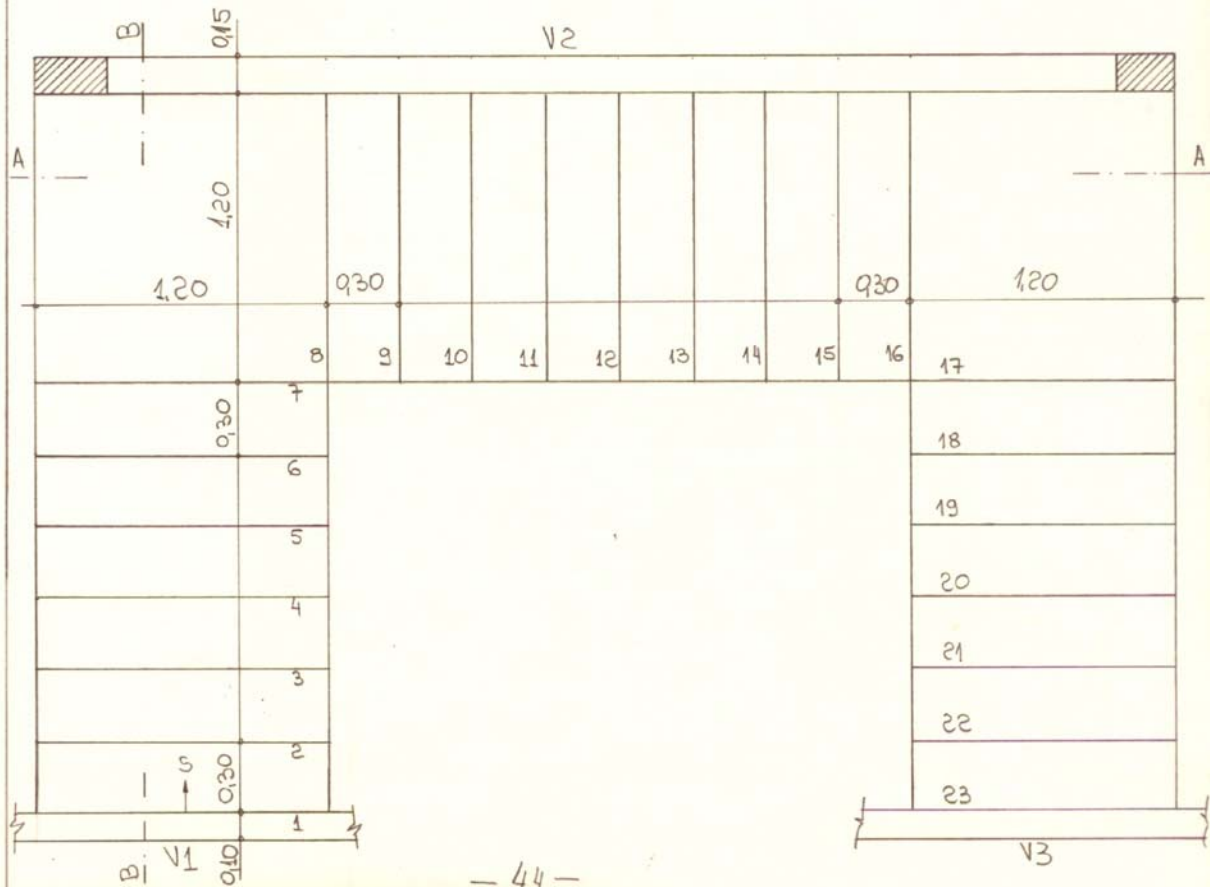
$M_{max} = 1,355 \text{ tf} \cdot \text{m} / \text{m} \rightarrow A_s = 6,26 \text{ cm}^2 / \text{m} (1\phi 8,0 \text{ c} / 8)$

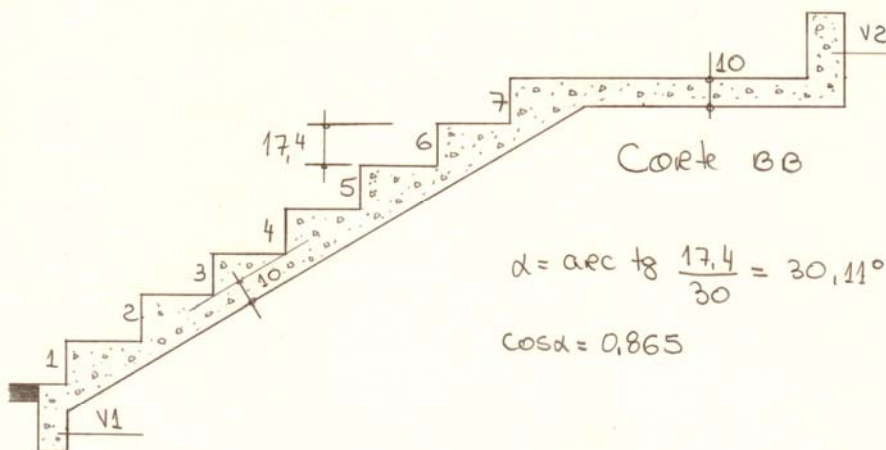
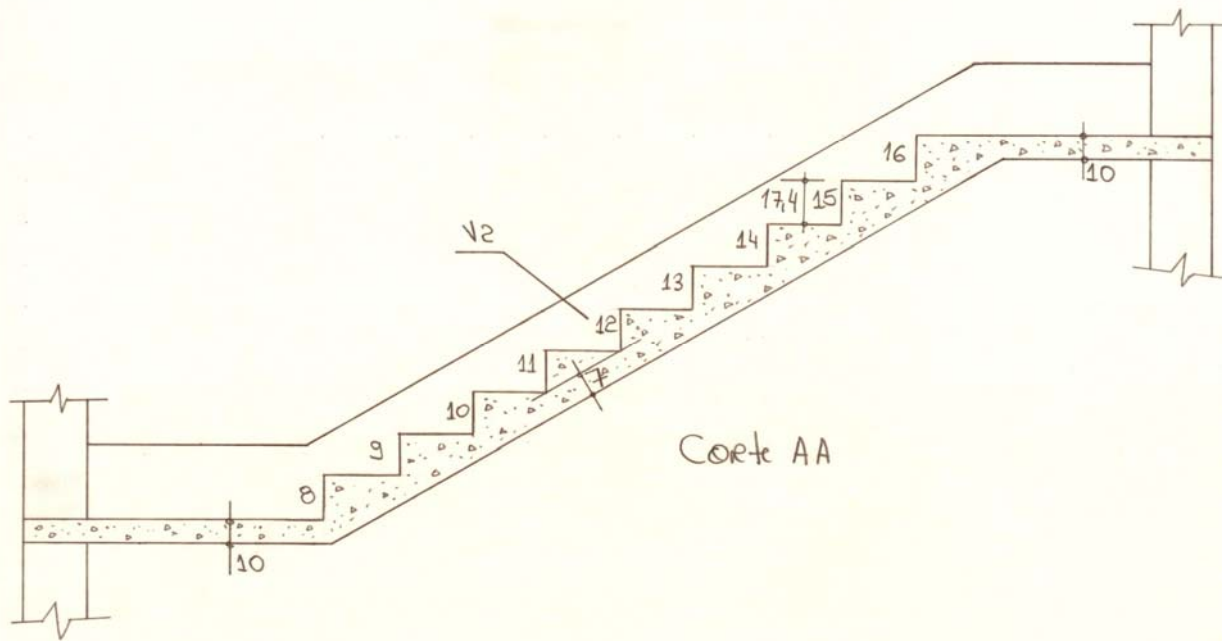
- Detalhamento das armaduras em corte





6º exemplo: dimensionar e detalhar as armaduras da escada abaixo, que faz parte de uma edificação com fins comerciais. São dados:  $f_{ck} = 150 \text{ kgf/cm}^2$  e aço CA-50 B.





$$\alpha = \arctan \frac{17,4}{30} = 30,11^\circ$$

$$\cos \alpha = 0,865$$

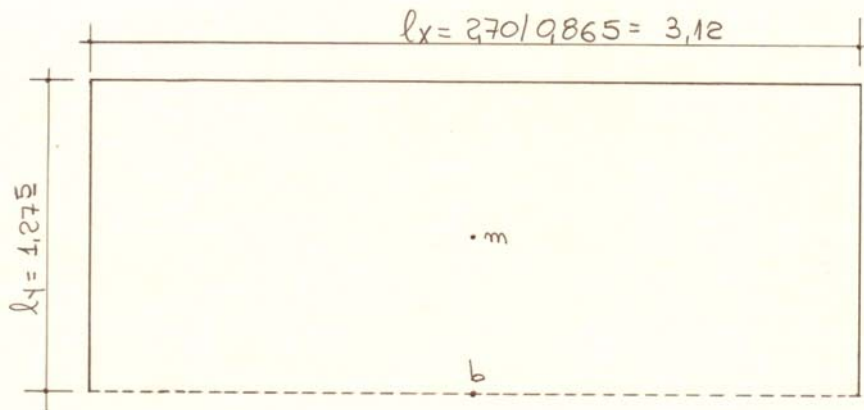
- Conforme foi visto no item (7), páginas 21 e 22, divide-se a escada em três lajes: L1, L2 e L3. A laje L2 é calculada como apoiada em três apoios e as lajes L1 e L3 são armadas longitudinalmente.

- Carga própria na laje L2

$$\text{peso próprio} = \left( \frac{0,07}{0,865} + \frac{0,174}{2} \right) \cdot 2,50 = 0,420 \text{ tf/m}^2$$

- Revestimento - na falta de maiores informações será adotado o valor  $0,100 \text{ tf/m}^2$
- sobrecarga -  $0,300 \text{ tf/m}^2$
- carga total =  $0,820 \text{ tf/m}^2$

Para o cálculo da laje L2 deve-se considerar a carga perpendicular ao plano da mesma.



$$l_y/l_x = 1,275/3,12 = 0,409$$

$$q' = q \cdot \cos^2 \alpha = 0,820 \cdot 0,865^2 = 0,613 \text{ tf/m}^2$$

$$Q = 0,613 \cdot 3,12 \cdot 1,275 = 2,44 \text{ tf}$$

$$M_{x,m} = \frac{2,44}{21,4} = 0,114 \text{ tf}\cdot\text{m/m}$$

$$M_{x,b} = \frac{2,44}{19,60} = 0,124 \text{ tf}\cdot\text{m/m} \rightarrow 1,44 \text{ cm}^2/\text{m} \\ (1\phi 5,0 \text{ c } 14)$$

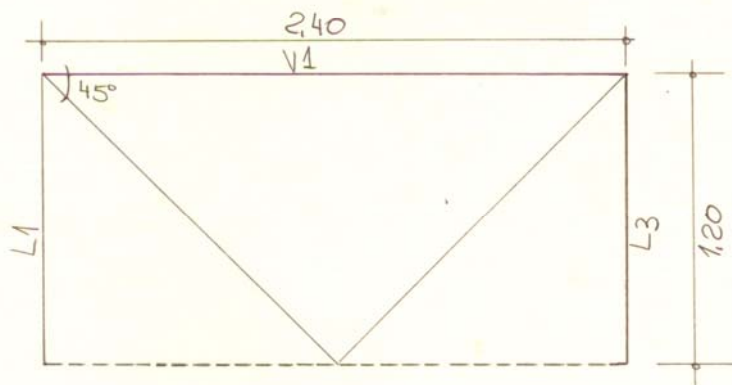
$$M_{y,m} = \frac{2,44}{29,4} = 0,083 \text{ tf}\cdot\text{m/m} \rightarrow 0,73 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (A_{s_{\text{mín}}} = 0,15 \cdot 7 = 1,05 \text{ cm}^2/\text{m}) \\ (1\phi 4,0 \text{ c } 12)$$

- Carregamento nas lajes L1 e L3

- peso próprio na região dos degraus =  $\left(\frac{0,10}{9865} + \frac{0,174}{2}\right) \cdot 2,5 = 0,507 \frac{\text{tf}}{\text{m}^2}$

- peso próprio no patamar =  $0,10 \cdot 2,50 = 0,250 \text{ tf/m}^2$

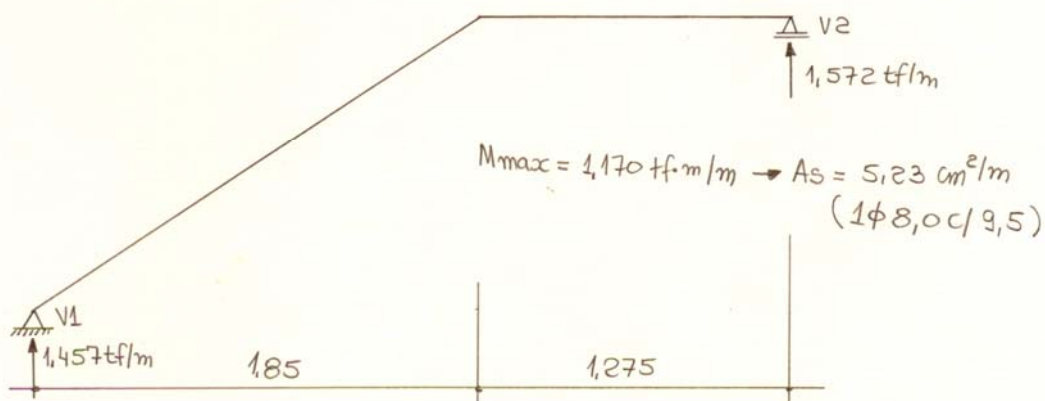
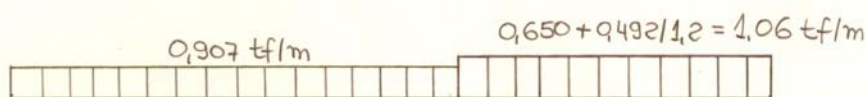
- Reação da laje L2 - tomando a projeção vertical da mesma:



$$q = 0,820 \text{ tf/m}^2$$

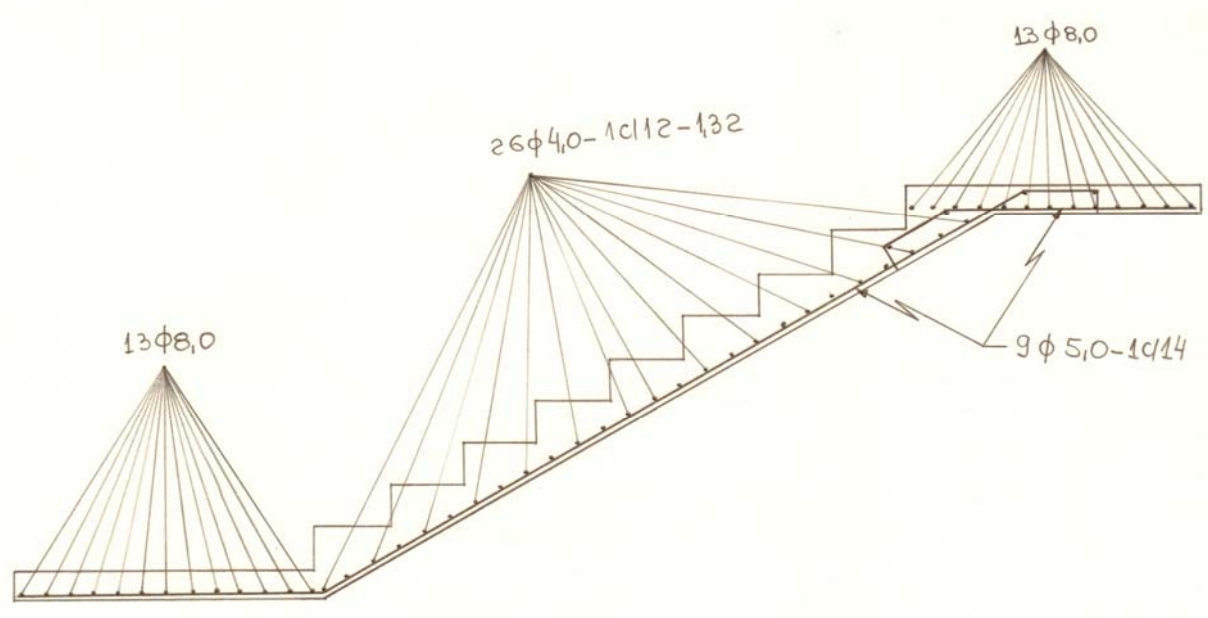
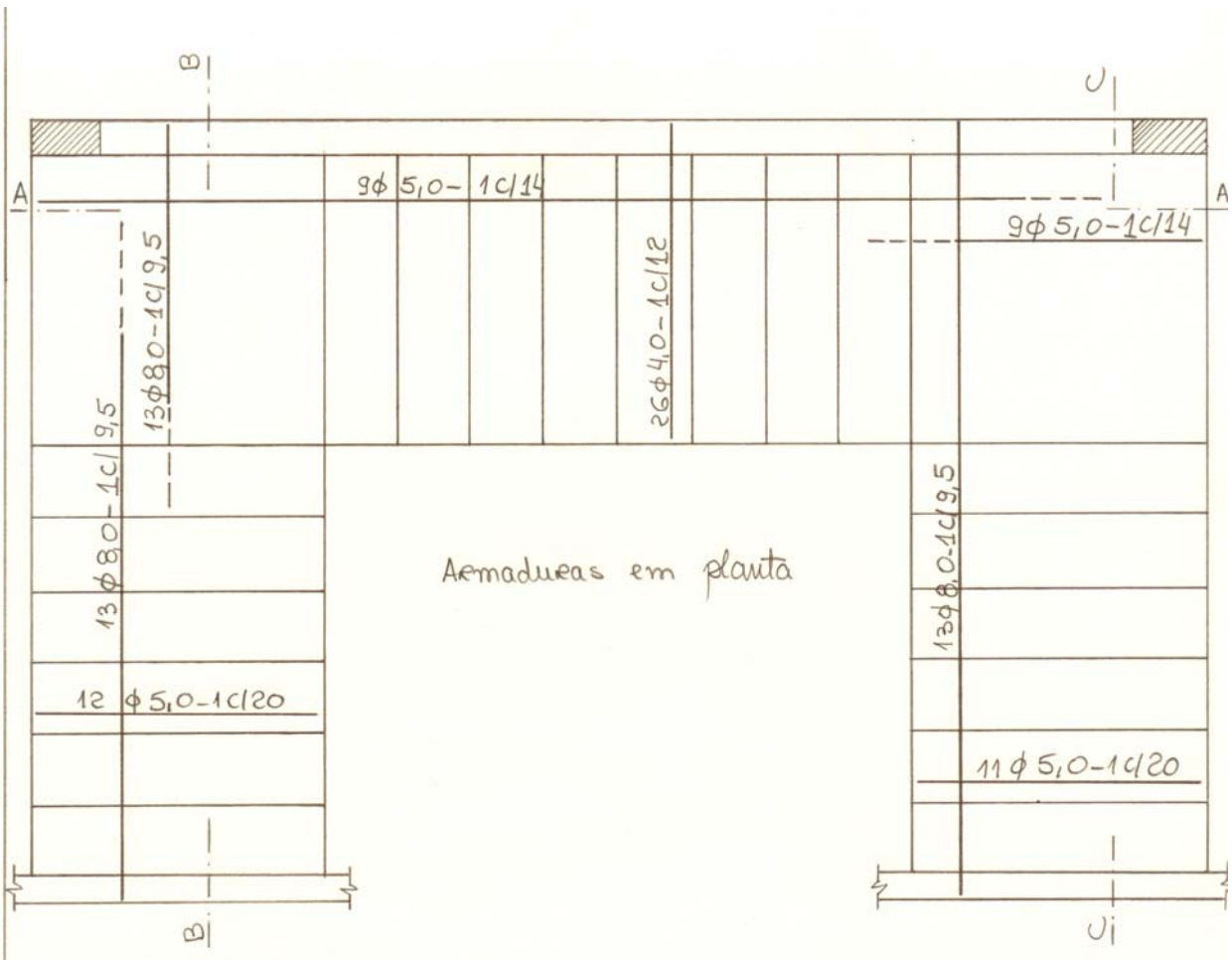
$$R_{V1} = R_{L1} = R_{L3} = 0,492 \frac{\text{tf}}{\text{m}}$$

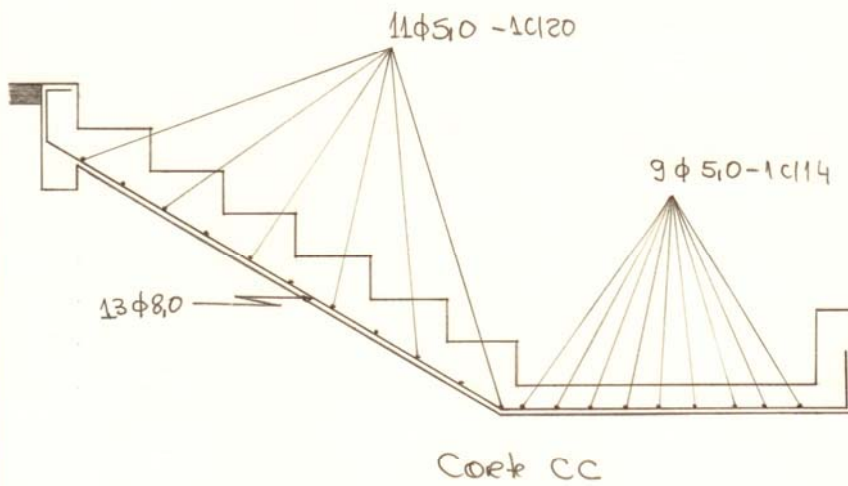
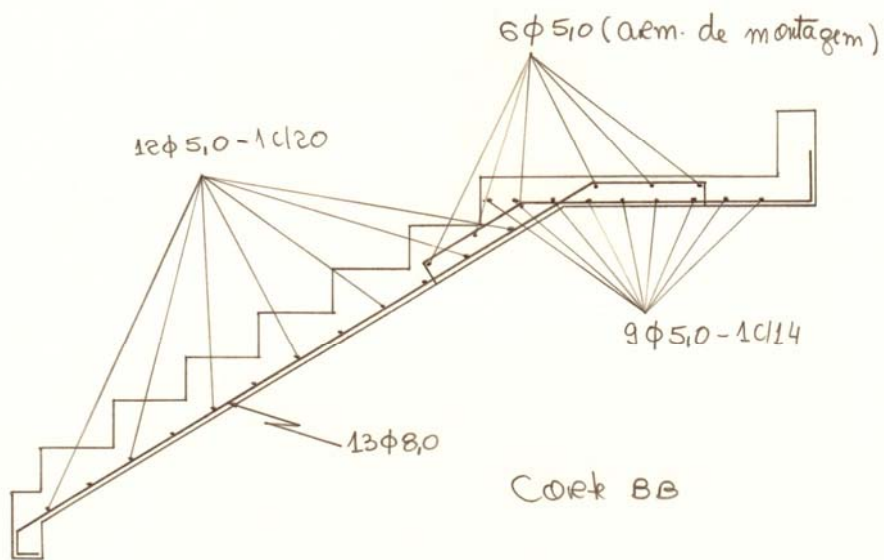
- Cálculo dos esforços e armaduras do L1



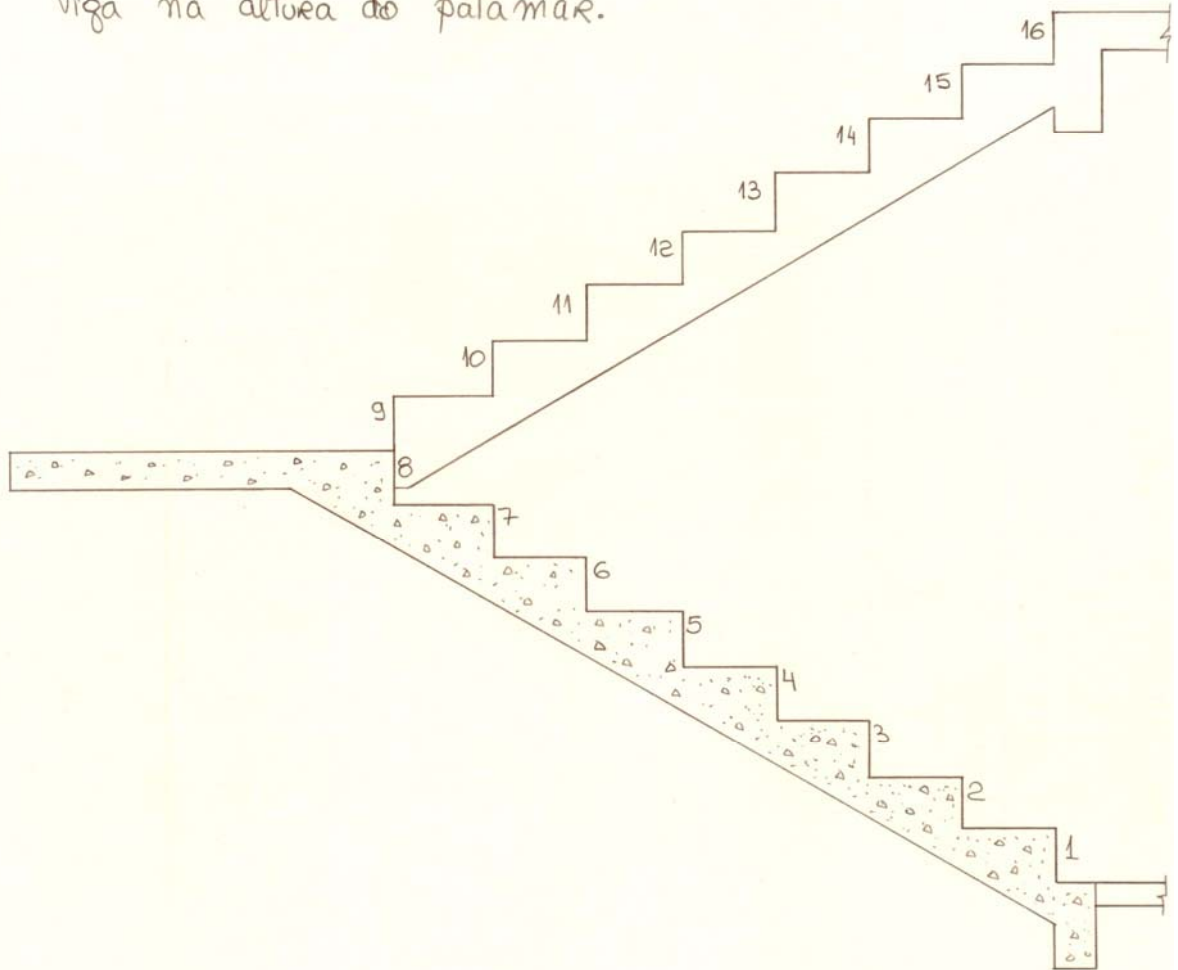
- Cálculo dos esforços e armaduras de L3 - os valores são iguais aos da laje L1.

- Detalhamento das armaduras:





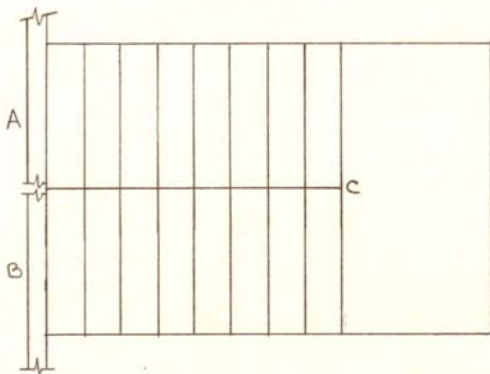
10. Escada auto-portante - é uma escada em "U", semelhante à vista no item 6, porém não possuindo a viga na altura do patamar.



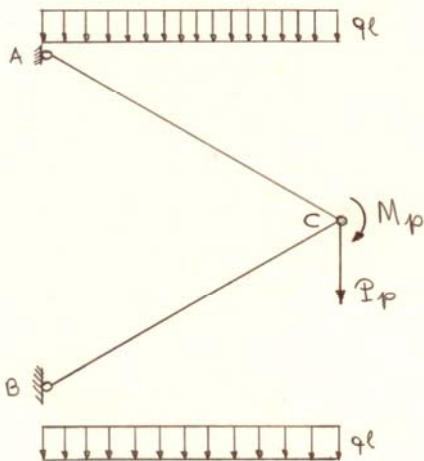
A solução tórica escata para a análise deste tipo de escada é difícil de ser obtida em cálculos sem uso de um computador. Diversas soluções aproximadas têm sido propostas por diferentes autores.

- 10.1. Proposição de Guerrin - método bastante simplificado; admite os lances articulados no patamar e este suficientemente rígido para que a deformação horizontal

Seja praticamente nula.



Assim, pode-se admitir o seguinte modelo:



Sendo:

$q_l \rightarrow$  a carga aplicada nos lances

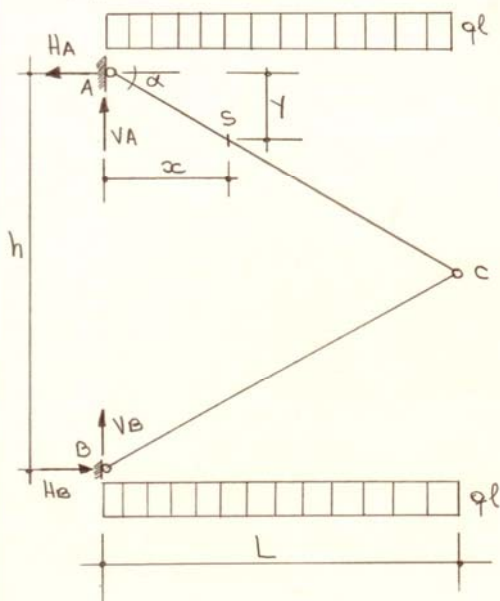
$M_p \rightarrow$  momento aplicado pelo patamar na junção dos lances com os lances

$F_p \rightarrow$  carga aplicada pelo patamar na junção com os lances

A articulação no ponto  $c$  é admitida quando não se considera a rigidez à torção do patamar, não havendo portanto a transmissão de momentos de um para outro lance. Entretanto, a junção de cada um dos lances com o patamar deve ser rígida para que este possa transmitir os esforços ( $M_p$  e  $F_p$ ) àqueles, sem o que não haveria o equilíbrio.

Dependendo das condições de vinculação dos lances com as vigas de apoio ( $A$  e  $B$ ), pode-se considerar um engaste ao invés de uma articulação.

Admitindo uma articulação junto aos apoios A e B e fazendo a análise só para as cargas atuantes nos lances tem-se:



$$y = \frac{x \cdot h}{2L}$$

Fazendo  $\sum M_0 = 0$  tem-se:

$$H_A \cdot h = \frac{q_l \cdot L^2 \cdot 2}{2} \rightarrow \boxed{H_A = \frac{q_l \cdot L^2}{h}}$$

$$\sum H = 0 \rightarrow \boxed{H_B = \frac{q_l \cdot L^2}{h}}$$

$$M_C = 0 \therefore H_A \cdot \frac{h}{2} - V_A \cdot L + \frac{q_l \cdot L^2}{2} = 0$$

$$V_A \cdot L = \frac{q_l \cdot L^2}{2} + \frac{q_l \cdot L^2 \cdot h}{2h}$$

$$\boxed{V_A = q_l \cdot L}$$

$$\sum V = 0 \rightarrow \boxed{V_B = q_l \cdot L}$$

- Determinação dos esforços solicitantes internos no lance superior.

$$* M(x) = V_A \cdot x - H_A \cdot y - \frac{q_l \cdot x^2}{2}$$

$$M(x) = q_l \cdot L \cdot x - \frac{q_l \cdot L^2}{h} \cdot \frac{x \cdot h}{2L} - \frac{q_l \cdot x^2}{2}$$

$$\boxed{M(x) = q_l \cdot L \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2L} \right)}$$

$$p/ x = \frac{L}{2} \rightarrow M(x) = \frac{q_l \cdot L^2}{8}$$

$$* V(x) = V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha - q_l \cdot x \cdot \cos \alpha$$

$$V(x) = q_l \cdot L \cdot \cos \alpha - \frac{q_l \cdot L^2}{h} \cdot \sin \alpha - q_l \cdot x \cdot \cos \alpha$$

$$V(x) = q_l \cdot \cos \alpha \left( L - \frac{L^2}{h} \cdot \operatorname{tg} \alpha - x \right)$$

$$\left( \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2L} \right)$$

$$V(x) = ql \cdot \cos \alpha \left( L - \frac{L^2}{h} \cdot \frac{h}{2L} - x \right)$$

$$\boxed{V(x) = ql \cdot \cos \alpha \left( \frac{L}{2} - x \right)}$$

para  $x = 0 \rightarrow V(x) = ql \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \alpha$

para  $x = \frac{L}{2} \rightarrow V(x) = 0$

para  $x = L \rightarrow V(x) = -ql \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \alpha$

\*  $N(x) = VA \cdot \sin \alpha + HA \cdot \cos \alpha - ql \cdot x \cdot \sin \alpha$

$$N(x) = ql \cdot L \cdot \sin \alpha + \frac{ql \cdot L^2}{h} \cdot \cos \alpha - ql \cdot x \cdot \sin \alpha$$

$$N(x) = ql \cdot L \left( \sin \alpha + \frac{L}{h} \cos \alpha - \frac{x}{L} \sin \alpha \right)$$

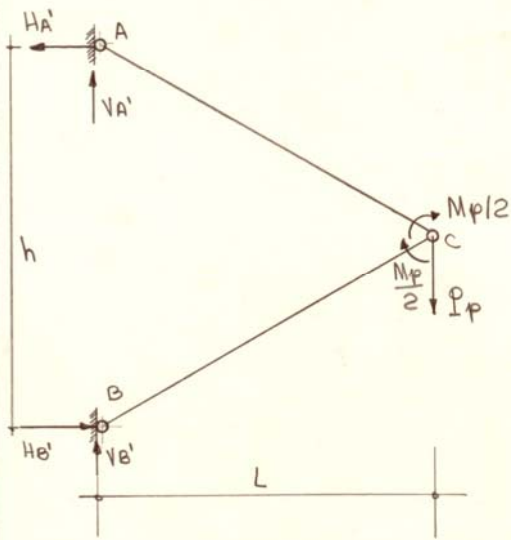
$$\boxed{N(x) = ql \cdot \cos \alpha \left( \frac{L^2}{h} + \frac{h}{2} - \frac{x}{2} \frac{h}{L} \right)}$$

para  $x = 0 \rightarrow N(x) = ql \cdot \cos \alpha \left( \frac{L^2}{h} + \frac{h}{2} \right)$

para  $x = \frac{L}{2} \rightarrow N(x) = ql \cdot \cos \alpha \left( \frac{L^2}{h} + \frac{h}{4} \right)$

para  $x = L \rightarrow N(x) = ql \cdot \cos \alpha \cdot \frac{L^2}{h}$

- Para o lance inferior os esforços são os mesmos, com exceção dos esforços normais que são de sinal contrário (compressão).
- Análise dos esforços para as ações atuantes na junção dos lances com o patamar ( $M_p, P_p$ )



Fazendo  $\sum M_B = 0$  tem-se:

$$H'_A \cdot h = P_p \cdot L + M_p$$

$$H'_A = \frac{P_p \cdot L + M_p}{h}$$

$$\sum H = 0 \rightarrow H'_B = H'_A$$

$$M_{fc} = 0 \therefore V'_A \cdot L - H'_A \cdot \frac{h}{2} + \frac{M_p}{2} = 0$$

$$V'_A = \frac{H'_A \cdot \frac{h}{2} - \frac{M_p}{2}}{L}$$

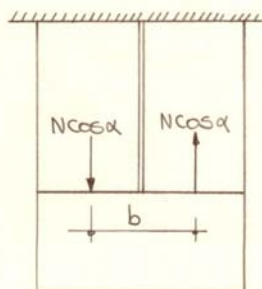
Substituindo na expressão acima o valor de  $H'_A$  chega-se

a 
$$V'_A = \frac{P_p}{2}$$
, como era de se esperar.

$$\sum V = 0 \rightarrow V'_B = V'_A$$

Com esses valores podem facilmente ser obtidos os esforços solicitantes internos e por superposição de efeitos, os esforços finais na escada.

Em planta, Cada lance exerce um esforço horizontal  $N \cdot \cos \alpha$  sobre o patamar, o que introduz neste um momento  $N \cdot \cos \alpha \cdot b$ . Para este momento o



patamar se comporta como uma viga de grande altura.

Pode-se admitir que o momento acima se distribua igualmente entre os dois lances.

O momento  $\frac{N \cdot \cos \alpha \cdot b}{2}$  que se admite atuando em cada lance provoca nos mesmos uma torção e uma flexão lateral.



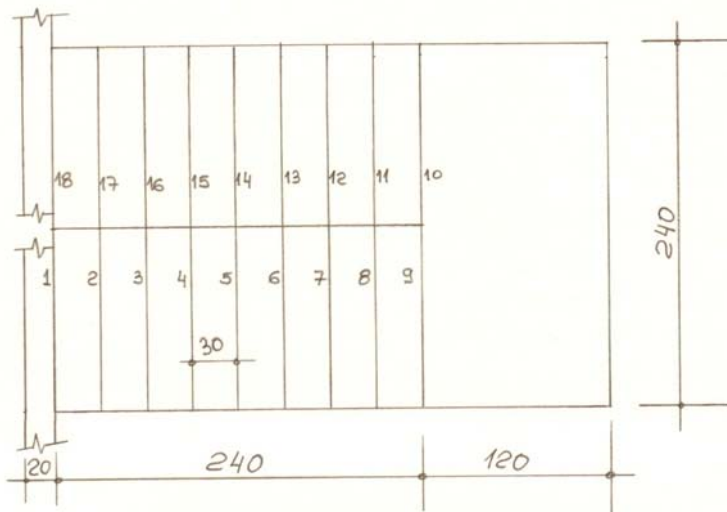
O momento que provoca flexão lateral vale:

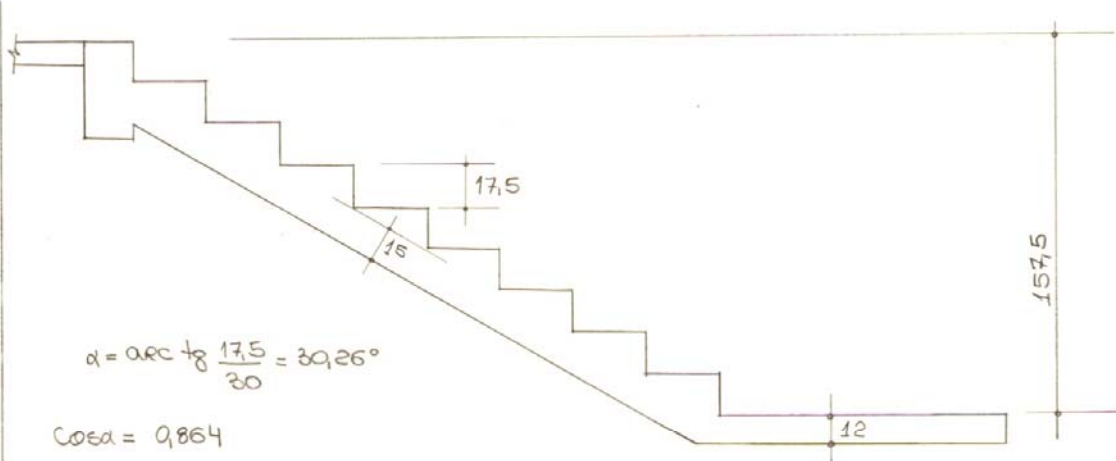
$$\left( \frac{N \cdot \cos \alpha \cdot b}{2} \right) \cdot \cos \alpha = \frac{N \cdot \cos^2 \alpha \cdot b}{2}$$

O momento que provoca torção vale:

$$\left( \frac{N \cdot \cos \alpha \cdot b}{2} \right) \cdot \sin \alpha = \frac{N \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot b}{2}$$

10.2. Exemplo - calcular a escada auto-portante, abaixo esquematizada, que faz parte da estrutura de uma residência. Adotar  $f_{ck} = 150 \text{ kgf/cm}^2$  e aço CA-50 A.





$$\alpha = \arctg \frac{17,5}{20} = 39,26^\circ$$

$$\cos \alpha = 0,864$$

$$\sin \alpha = 0,504$$

- Cargas nos lances:

$$\text{peso próprio} = \frac{0,15}{0,864} \cdot 2,50 + \frac{0,175}{2} \cdot 2,20 = 0,650 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{Revestimento} = 0,100 \text{ tf/m}^2 \text{ (adotado)}$$

$$\text{sobrecarga} = 0,250 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{total} = 1,00 \text{ tf/m}^2$$

- Cargas no patamar:

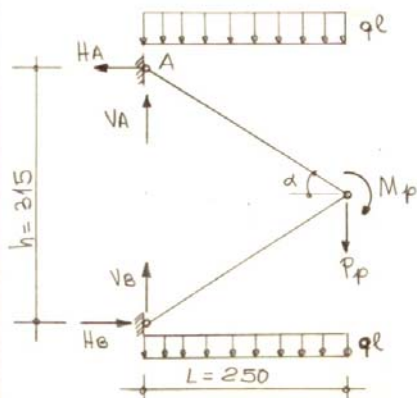
$$\text{peso próprio} = 0,12 \cdot 2,50 = 0,300 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{Revestimento} = 0,100 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{sobrecarga} = 0,250 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{total} = 0,650 \text{ tf/m}^2$$

- Determinação dos esforços:



$$q_l = 1,0 \times 1,20 = 1,20 \text{ tf/m}$$

$$\alpha = 32,21^\circ$$

$$\cos \alpha = 0,846$$

$$\sin \alpha = 0,533$$

$$M_p = 0,650 \cdot 2,40 \cdot \frac{1,20^2}{2} = 1,12 \text{ tf} \cdot \text{m}$$

$$P_p = 0,650 \cdot 2,40 \cdot 1,20 = 1,872 \text{ tf}$$

$$V_A = V_B = q_l \cdot L + \frac{P_p}{2} = 1,20 \cdot 2,50 + \frac{1,872}{2} = 3,936 \text{ tf}$$

$$H_A = H_B = \frac{q_l \cdot L^2}{h} + \frac{P_p \cdot L + M_p}{h} = \frac{1,20 \cdot 2,50^2}{3,15} + \frac{1,872 \cdot 2,50 + 1,12}{3,15} = 4,222 \text{ tf}$$

- Momentos nos lances:

$$M(x) = V_A \cdot x - H_A \cdot \gamma - \frac{q_l \cdot x^2}{2} \quad \left( \gamma = \frac{x \cdot h}{2L} = \frac{3,15}{5,00} \cdot x = 0,63x \right)$$

$$M(x) = 3,936 \cdot x - 4,222 \cdot 0,63 \cdot x - \frac{1,20 \cdot x^2}{2}$$

$$M(x) = 1,276 \cdot x - 0,60 \cdot x^2$$

$$M_{\max} = 0,678 \text{ tf} \cdot \text{m}$$

( $x = 1,063$ )

$$p|x = 2,50 \rightarrow M(x) = -0,56 \text{ tf} \cdot \text{m}$$

- Esforços normais nos lances:

$$N(x) = H_A \cdot \cos \alpha + V_A \cdot \sin \alpha - q_l \cdot x \cdot \sin \alpha$$

$$N(x) = 4,222 \cdot 0,846 + 3,936 \cdot 0,533 - 1,20 \cdot x \cdot 0,533$$

$$N(x) = 5,670 - 0,640 \cdot x$$

$$p|x = 0 \rightarrow N(x) = 5,670 \text{ tf}$$

$$p|x = 1,06 \rightarrow N(x) = 4,930 \text{ tf}$$

$$p|x = 2,50 \rightarrow N(x) = 4,070 \text{ tf}$$

- Esforços cortantes nos lances

$$Q(x) = V_A \cdot \cos \alpha - H_A \cdot \sin \alpha - q_l \cdot x \cdot \cos \alpha$$

$$Q(x) = 3,936 \cdot 0,846 - 4,222 \cdot 0,533 - 1,20 \cdot x \cdot 0,846$$

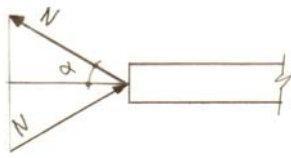
$$Q(x) = 1,080 - 1,015 \cdot x$$

$$p|x = 0 \rightarrow Q(x) = 1,080 \text{ tf}$$

$$p|x = 1,06 \rightarrow Q(x) = 0,00$$

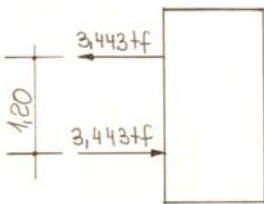
$$p|x = 2,50 \rightarrow Q(x) = -1,458 \text{ tf}$$

- Esforços horizontais no patamar aplicados pelos lances:



$$H = N \cdot \cos \alpha = 4,070 \cdot 0,846 = 3,443 \text{ tf}$$

- Momento no patamar:



$$M = 3,443 \cdot 1,20 = 4,132 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

Parcela atuante em cada lance:

$$\frac{M}{2} = \frac{4,132}{2} = 2,066 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

Componente que provoca flexão lateral nos lances:

$$2,066 \cdot \cos \alpha = 2,066 \cdot 0,846 = 1,748 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

Componente que provoca torção nos lances:

$$2,066 \cdot \sin \alpha = 2,066 \cdot 0,533 = 1,10 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

- Determinação das armaduras nos lances:

Para o lance superior deve-se dimensionar à flexo-tração para os valores:  $M = 0,678 \text{ tf}\cdot\text{m}$  e  $N = 4,990 \text{ tf}$

A seção a ser utilizada é  $(120 \times 15)$ , podendo-se adotar  $d' = 2 \text{ cm}$ .

Para o lance inferior o dimensionamento é à flexo-compressão, com os mesmos valores dos esforços.

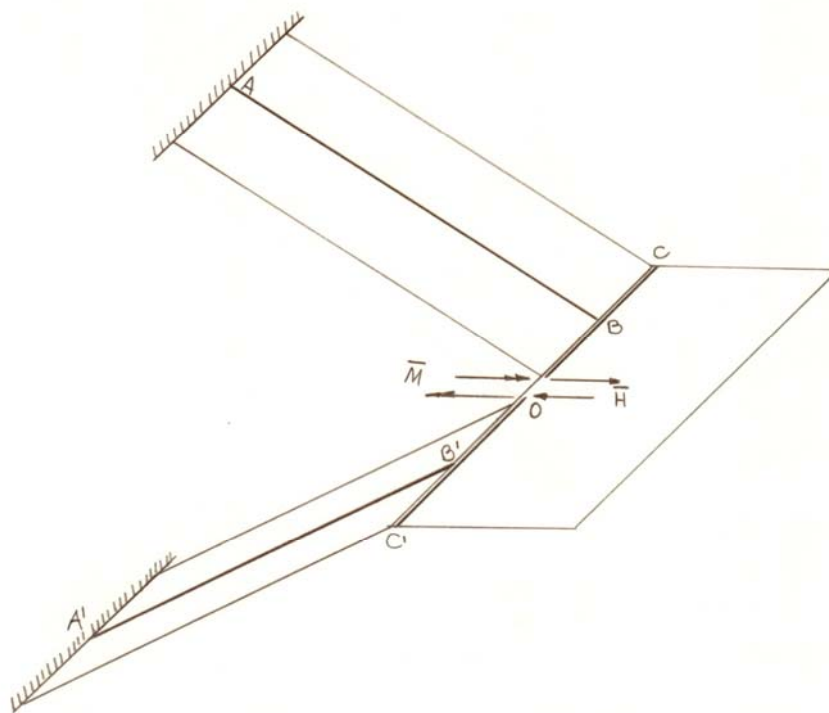
Os dois lances devem ainda ser dimensionados para um momento de  $1,748 \text{ tf}\cdot\text{m}$  que provoca flexão lateral,

sendo então a seção (15x120), o que certamente conduz a uma armadura mínima; e para um momento de torção de 1,10 tf.m

- Determinação das armaduras no patamar:

O patamar deve ser dimensionado como laje para o momento  $M_p = 1,12 \text{ tf.m}$ , com seção (240x12), sendo desprezível o efeito de  $P_p = 1,872 \text{ tf}$ ; e como viga para o momento 4,132 tf.m, com seção (12x120).

10.3. Proposição de Knijnik e Tavares - Amibal Knijnik e José Júlio Alves Tavares, baseados em trabalho de Cusens e Kuang, propõe o seguinte modelo:

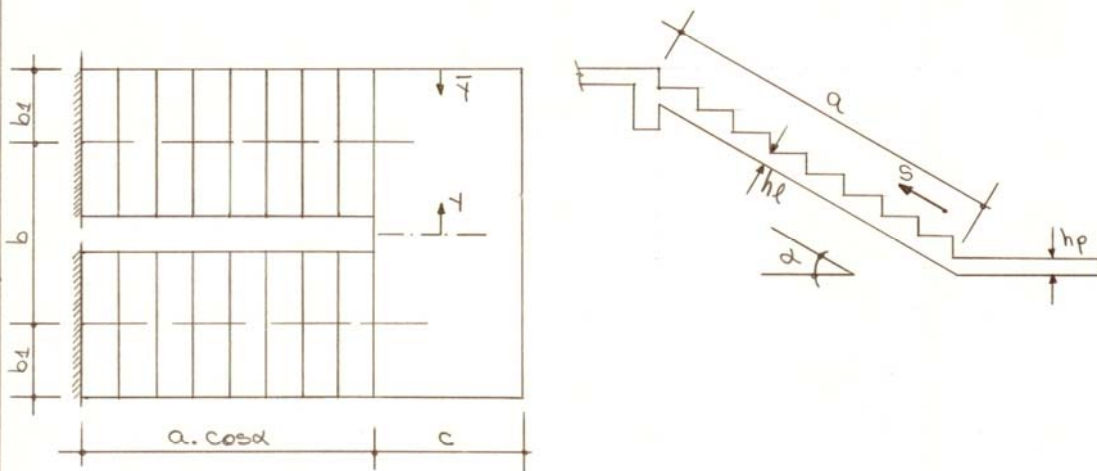


A escada constitui um pórtico espacial com duas barras inclinadas (os lances) unidas por uma barra reta, com o eixo coincidente com a intersecção entre os lances e o

patamar e com o mesmo comprimento deste.

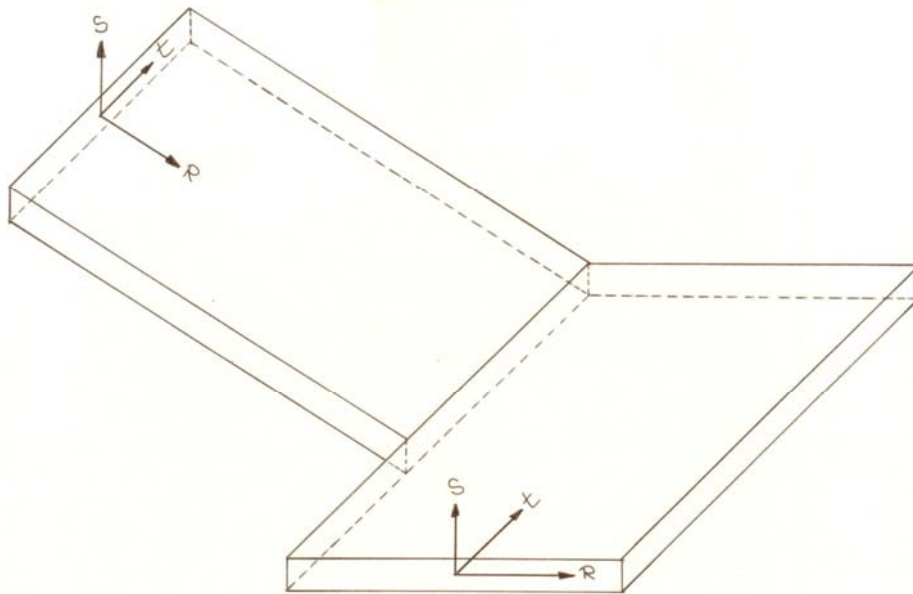
As grandezas hiperestáticas escolhidas foram o momento fletor  $\bar{M}$  e o esforço horizontal  $\bar{H}$  no ponto O, ponto médio do sistema ABOB'A'. Os demais esforços são inexistentes no ponto O devido à simetria da estrutura e do carregamento. Mediante a aplicação das ações  $\bar{M}$  e  $\bar{H}$  a cada uma das partes em que a estrutura fica dividida garante-se a manutenção do estado de equilíbrio, podendo-se trabalhar com um sistema estaticamente determinado.

A determinação das grandezas hiperestáticas  $\bar{H}$  e  $\bar{M}$  será efetuada através da aplicação do teorema de Castigliano a uma das metades, a superior.



Serão desprezados os efeitos das forças axiais e esforços cortantes na determinação dos deslocamentos, considerando-se somente as parcelas oriundas das ações de momentos fletores e torções.

A indicação do sentido positivo dos momentos está representada na figura abaixo.



As cargas atuantes são:

$q_l \rightarrow$  carga linear no lance (AO)

$q_p \rightarrow$  carga linear no patamar (OBC)

O primeiro passo para a análise é a determinação das equações de momentos nas barras do pórtico equivalente.

- Barra OB

$$M_s = \bar{H} \cdot y$$

$$M_R = \bar{M} + q_p \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$M_t = q_p \cdot \frac{c}{2} \cdot y$$

- Barra BC

$$M_s = 0$$

$$M_R = q_p \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$M_t = q_p \cdot \frac{c}{2} \cdot y$$

- Barra AB

$$M_R = \bar{M} \cdot \cos \alpha - \bar{H} \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{qp}{2} \left( \frac{b^2}{4} - b_1^2 \right) \cos \alpha$$

$$M_S = \bar{M} \cdot \sin \alpha + \bar{H} \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{qp}{2} \left( \frac{b^2}{4} - b_1^2 \right) \sin \alpha$$

$$M_t = qp \cdot \frac{c}{2} \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) + \left[ qp \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) \cos \alpha - \bar{H} \cdot \sin \alpha \right] s + ql \cdot \frac{s^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2}$$

Denominando-se  $U$  à energia de deformação, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{H}} = \int_0^{b/2} \frac{M_S}{E \cdot I_p^v} \cdot \frac{\partial M_S}{\partial \bar{H}} \cdot dy + \int_0^a \frac{M_R}{G \cdot J_p^e} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial \bar{H}} \cdot ds + \int_0^a \frac{M_S}{E \cdot I_l^v} \cdot \frac{\partial M_S}{\partial \bar{H}} \cdot ds + \int_0^a \frac{M_t}{E \cdot I_l^h} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial \bar{H}} \cdot ds$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{M}} = \int_0^{b/2} \frac{M_R}{E \cdot I_p^h} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial \bar{M}} \cdot dy + \int_0^a \frac{M_S}{E \cdot I_l^v} \cdot \frac{\partial M_S}{\partial \bar{M}} \cdot ds + \int_0^a \frac{M_R}{G \cdot J_p^e} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial \bar{M}} \cdot ds$$

Onde:

$I_p^v \rightarrow$  é o momento de inércia da seção A (patamar) em relação ao eixo S (vertical). Segundo autores, considera-se como efetivamente resistente somente metade da largura do patamar.

$$I_p^v = \frac{hp \cdot \left( \frac{c}{2} \right)^3}{12}$$

$I_p^h \rightarrow$  é o momento de inércia da seção transversal do patamar (seção A) em relação ao eixo R (horizontal)

$$I_p^h = \frac{\frac{c}{2} \cdot hp^3}{12}$$

$J_p^l \rightarrow$  é o momento de inércia à torção da seção transversal do lance (seção B) em torno do eixo R.

$$J_p^l = \frac{2b_1 \cdot hl^3}{16} \left\{ \frac{16}{3} - 3,36 \cdot \frac{hl}{2 \cdot b_1} \left[ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{hl}{2b_1} \right)^4 \right] \right\}$$

$I_l^v \rightarrow$  é o momento de inércia da seção transversal do lance (seção B) em relação ao eixo s (vertical).

$$I_l^v = \frac{hl \cdot (2b_1)^3}{12}$$

$I_l^h \rightarrow$  é o momento de inércia da seção transversal do lance (seção B) em relação ao eixo t (horizontal).

$$I_l^h = \frac{(2b_1) \cdot hl^3}{12}$$

G e E são respectivamente os módulos de elasticidade transversal e longitudinal do material do que é feita a escada.

Devido à simetria de cargas e à antimetria da estrutura, tem-se que:

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial M} = 0$$

Com isso tem-se um sistema de duas equações a duas incógnitas, que resolvido nos dão os valores de  $\bar{H}$  e  $\bar{M}$ .

Antes do desenvolvimento das equações componentes do sistema serão feitas algumas considerações adicionais.

Em uma estrutura plana, com uma dimensão da seção transversal bastante superior à outra, a inércia em relação ao eixo principal de máxima é muitas vezes superior

àquela em relação ao eixo principal de mínima. No presente caso tem-se:

$$I_p^v \gg I_p^h \quad \text{e} \quad I_l^v \gg I_l^h$$

Com isso:

$$\frac{1}{I_p^v} \ll \frac{1}{I_p^h} \quad \text{e} \quad \frac{1}{I_l^v} \ll \frac{1}{I_l^h}, \text{ podendo-se despre-$$

zar todas as expressões contendo como fator  $1/I_p^v$  e/ou  $1/I_l^v$  em presença das que contêm o fator  $1/I_p^h$  e/ou  $1/I_l^h$ .

Assim, as equações anteriormente apresentadas se reduzem a

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \int_0^a \frac{M_R}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial H} \cdot ds + \int_0^a \frac{M_t}{E \cdot I_l^h} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial H} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^{b/2} \frac{M_R}{E \cdot I_p^h} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial M} \cdot dy + \int_0^a \frac{M_R}{G \cdot J_p} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial M} \cdot ds = 0$$

Multiplicando ambas as equações por  $E \cdot I_l^h$  e fazendo

$$\frac{J_p^l}{I_l^h} = \varepsilon, \quad \frac{I_p^h}{I_l^h} = \beta \quad \text{e} \quad \frac{G}{E} = \gamma$$

fica-se com o seguinte sistema simplificado:

$$\int_0^a \frac{M_R}{\gamma \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial H} \cdot ds + \int_0^a M_t \cdot \frac{\partial M_t}{\partial H} \cdot ds = 0$$

$$\int_0^{b/2} \frac{M_R}{\beta} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial M} \cdot dy + \int_0^a \frac{M_R}{\gamma \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial M} \cdot ds = 0$$

que explicitado e expresso em termos das incógnitas  $\bar{H}$  e  $\bar{M}$  toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} A \cdot \bar{H} + B \cdot \bar{M} + C = 0 \\ D \cdot \bar{H} + E \cdot \bar{M} + F = 0 \end{cases}$$

onde:

$$A = \left( 0,333 a^2 + 0,575 \frac{b^2}{\varepsilon} \right) \tan \alpha$$

$$B = -1,15 \frac{b}{\varepsilon}$$

$$C = - \left\{ \frac{q l \cdot a^3}{8} \cos \alpha + q p \left[ \frac{a \cdot c}{4} \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) \sec \alpha + \frac{a^2}{3} \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) + 0,575 \frac{b}{\varepsilon} \left( \frac{b^2}{4} - b_1^2 \right) \right] \right\}$$

$$D = -1,15 \frac{a \cdot b}{\varepsilon} \tan \alpha$$

$$E = \frac{b}{2\beta} \sec^2 \alpha + 2,30 \frac{a}{\varepsilon}$$

$$F = q p \left[ \frac{b^3}{48\beta} \sec^2 \alpha + 1,15 \frac{a \left( \frac{b^2}{4} - b_1^2 \right)}{\varepsilon} \right]$$

Calculados os coeficientes, substituindo-os no sistema de equações, acham-se os valores de  $\bar{H}$  e  $\bar{M}$ , que colocados nas equações dos momentos nos permitem a determinação dos seus valores em qualquer ponto da estrutura.

São propostas ainda algumas simplificações:

1ª. quase sempre a largura  $c$  do patamar é praticamente

a mesma largura que tem o lance, ou seja,  $c = 2b_1$ ;

2ª. o valor do  $\varepsilon = \frac{J_p^L}{I_x^H}$  pode ser aproximado por:

$$\varepsilon = \frac{(2b_1)hl^3(0,33 - 0,21 \frac{hl}{2b_1})}{\frac{(2b_1)hl^3}{12}} = 12(0,33 - 0,21 \cdot \frac{hl}{2b_1})$$

3ª. o valor do  $\beta = \frac{I_p^H}{I_x^H}$  pode ser expresso como sendo:

$$\beta = \frac{(\frac{c}{2})h_p^3}{12} \cdot \frac{12}{(2b_1)hl^3} = \frac{c}{2(2b_1)} \left(\frac{h_p}{hl}\right)^3 = 0,50 \left(\frac{h_p}{hl}\right)^3$$

4ª. o valor de  $\gamma = G/E$  adotado para o concreto foi 0,435

10.4. Resolver, de acordo com a formulação anterior, a escada exemplificada no item (10.2)

Os parâmetros para a resolução da escada são os seguintes:

$$q_l = 1200 \text{ Kgf/m}$$

$$q_p = 650 \times 1,20 = 780 \text{ Kgf/m}$$

$$\alpha = 30,26^\circ$$

$$h_l = 15 \text{ cm}$$

$$h_p = 12 \text{ cm}$$

$$a = L/\cos\alpha = 2,50/0,864 = 2,89 \text{ m}$$

$$b_1 = 1,20/2 = 0,60 \text{ m}$$

$$b = 1,20 \text{ m}$$

- Cálculo dos coeficientes  $\varepsilon$  e  $\beta$

$$E = 12 \left( 0,33 - \frac{0,21 \cdot 15}{2 \cdot 60} \right) = 3,645$$

$$\beta = 0,50 \left( \frac{12}{15} \right)^3 = 0,256$$

- Cálculo dos coeficientes A, B, C, D, E, F:

$$A = \left( 0,333 \cdot 2,89^2 + \frac{0,575 \cdot 1,20^2}{3,645} \right) \tan 30,26^\circ = 1,755$$

$$B = -1,15 \cdot \frac{1,20}{3,645} = -0,379$$

$$C = - \left\{ \frac{1200 \cdot 2,89^3 \cdot \cos 30,26^\circ}{8} + 780 \left[ \frac{2,89 \cdot 1,20}{4} \left( \frac{1,20}{2} + 0,60 \right) \sec 30,26^\circ + \frac{2,89^2}{3} \left( \frac{1,20}{2} + 0,60 \right) + \frac{0,575 \cdot 1,20}{3,645} \left( \frac{1,20^2}{4} - 0,60^2 \right) \right] \right\} = -7737,15$$

$$D = -\frac{1,15 \cdot 2,89 \cdot 1,20}{3,645} \tan 30,26^\circ = -0,638$$

$$E = \frac{1,20}{2 \cdot 0,256} \cdot \sec^2 30,26^\circ + 2,30 \cdot \frac{2,89}{3,645} = 4,965$$

$$F = 780 \left[ \frac{1,20^3}{48 \cdot 3,645} \cdot \sec^2 30,26^\circ + 1,15 \frac{2,89 \left( \frac{1,20^2}{4} - 0,60^2 \right)}{3,645} \right] = 10,326$$

- Cálculo dos hiperestáticos  $\bar{H}$  e  $\bar{M}$ :

$$\begin{cases} 1,755 \bar{H} - 0,379 \bar{M} - 7737,15 = 0 \\ -0,638 \bar{H} + 4,965 \bar{M} + 10,326 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{H} = 4534 \text{ kgf}$$

$$\bar{M} = 580,54 \text{ kgf}\cdot\text{m}$$

147,02

147,02

- Determinação dos esforços no lance superior (base AB)

$$* M_R = \bar{M} \cdot \cos \alpha - \bar{H} \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{q_p}{2} \left( \frac{b^2}{4} - b_1^2 \right) \cos \alpha$$

como nesse exemplo  $\frac{b}{2} = b_1 \rightarrow \frac{b^2}{4} - b_1^2 = 0$ , fica-se então com

$$M_R = 0,58 \cdot \cos 30,26^\circ - 4,534 \cdot \frac{1,20}{2} \cdot \sin 30,26^\circ = -0,870 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

O momento acima provoca torção na peça.

$$* M_S = \bar{M} \cdot \sin \alpha + \bar{H} \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{q_p}{2} \left( \frac{b^2}{4} - b_1^2 \right) \sin \alpha$$

$$M_S = 0,58 \cdot \sin 30,26^\circ + 4,534 \cdot \frac{1,20}{2} \cdot \cos 30,26^\circ = 2,642 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

O momento acima provoca uma flexão lateral no lance, tornando o bordo interno do mesmo.

$$* M_t = q_p \cdot \frac{s}{2} \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) + \left[ q_p \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) \cos \alpha - \bar{H} \cdot \sin \alpha \right] s + q_l \cdot \frac{s^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2}$$

$$M_t = 0,78 \cdot \frac{1,20}{2} \left( \frac{1,20}{2} + 0,60 \right) + \left[ 0,78 \left( \frac{1,20}{2} + 0,60 \right) \cos 30,26^\circ - 4,534 \cdot \sin 30,26^\circ \right] s + \frac{1,20 \cdot s^2 \cdot \cos^2 30,26^\circ}{2}$$

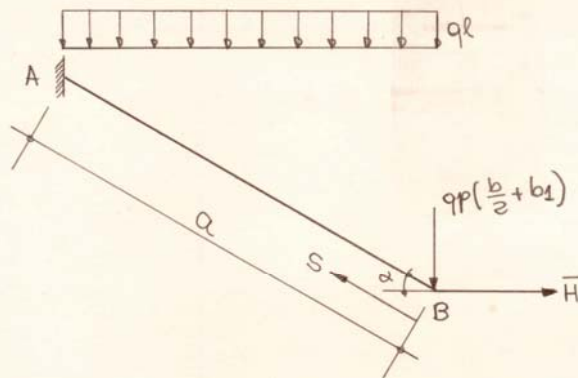
$$M_t = 0,562 - 1,476 \cdot s + 0,448 s^2$$

$$p \text{ s} = 0 \rightarrow M_t = 0,562 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

$$p \text{ s} = 1,65 \rightarrow M_t = -0,654 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

$$p \text{ s} = 2,89 \rightarrow M_t = 0,038 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

### \* Esforços cortantes



$$V(s) = \bar{H} \cdot \sin \alpha - q_p \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) \cos \alpha - q_l \cdot \cos^2 \alpha \cdot s$$

$$V(s) = 4,534 \cdot \sin 30,26^\circ - 0,78 \left( \frac{1,20}{2} + 0,60 \right) \cos 30,26^\circ - 1,20 \cdot \cos^2 30,26^\circ \cdot s$$

$$V(s) = 1,476 - 0,895 \cdot s$$

$$p|s=0 \rightarrow V_B = 1,476 \text{ tf}$$

$$p|s=4,65 \rightarrow V = 0,00 \text{ tf}$$

$$p|s=2,89 \rightarrow V_A = -1,111 \text{ tf}$$

### \* Esforços normais

$$N(s) = \bar{H} \cdot \cos \alpha + q_p \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) \sin \alpha + q_l \cdot \cos \alpha \cdot s \cdot \sin \alpha$$

$$N(s) = 4,534 \cdot \cos 30,26^\circ + 0,78 \left( \frac{1,20}{2} + 0,6 \right) \sin 30,26^\circ + 1,20 \cdot \cos 30,26^\circ \cdot \sin 30,26^\circ \cdot s$$

$$N(s) = 4,388 + 0,522 \cdot s$$

$$p|s=0 \rightarrow N_B = 4,388 \text{ tf}$$

$$p|s=4,65 \rightarrow N = 5,249 \text{ tf}$$

$$p|s=2,89 \rightarrow N = 5,897 \text{ tf}$$

- Determinação dos momentos no patamar (barra OB)

$$* M_s = \bar{H} \cdot y = 4,534 \cdot y$$

$$p|y = \frac{b}{2} = 0,6 \rightarrow M_s = 2,720 \text{ tf} \cdot \text{m}$$

O momento anterior flete lateralmente o patamar, tracionando o bordo interno (junção com os lances)

$$* M_R = \bar{M} + q_p \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$M_R = 9580 + 0,78 \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$\text{pl } y = \frac{b}{2} \rightarrow M_R = 0,720 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

Esse momento flete verticalmente o patamar, tracionando a face superior.

$$* M_t = q_p \cdot \frac{c}{2} \cdot y = 0,78 \cdot \frac{120}{2} \cdot y = 0,468 \cdot y$$

$$\text{pl } y = \frac{b}{2} \rightarrow M_t = 0,281 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

Esse momento provoca torção no patamar (segundo o modelo adotado).

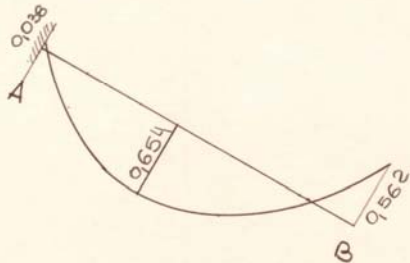
Além dos valores anteriores, admitindo o patamar ergastado nos lances, cada metade do patamar deve ser dimensionada para um momento agudo no plano vertical definido pelos eixos S e R do valor  $q_p \cdot \frac{c}{2} \cdot (\frac{b}{2} + b_1) = 0,562 \text{ tf}\cdot\text{m}$

- Determinação dos esforços no lance inferior (barras A'B')

Os valores dos esforços são os mesmos já obtidos para a barra AB, mudando apenas o sentido do esforço normal que passa a ser de compressão.

- Determinação das armaduras no lance superior

+ Diagrama de momentos fletores no plano vertical (Mt)



Armaduras positivas - dimensionamento à flexo-tração com os esforços:  $MK = 0,654 \text{ t.f.m}$  e  $NK = 5,25 \text{ t}$

Seção - (120 x 15)

$$d' = 2,5 \text{ cm}$$

$$\beta h = \frac{h}{d} = \frac{15}{12,5} = 1,20$$

$$V = \frac{1,4 \cdot 5250}{91,07 \cdot 120 \cdot 12,5} = -0,054$$

$$\mu = \frac{1,4 \cdot 65,4}{9,09107 \cdot 120 \cdot 12,5^2} = 0,054$$

Zona D  $\left\{ \begin{array}{l} A_{s1} = \text{tração} \\ A_{s2} = 0 \end{array} \right.$

$$\rho_s = 0,18\% \rightarrow A_{s1} = 2,75 \text{ cm}^2$$

$$A_{s\text{min}} = 0,15\% \cdot b \cdot h = \frac{0,15}{100} \cdot 120 \cdot 15 = 2,70 \text{ cm}^2$$

Armaduras negativas (ponto B) - dimensionamento à flexo-tração com os esforços:  $MK = 0,562 \text{ t.f.m}$  e  $NK = 5,90 \text{ t}$

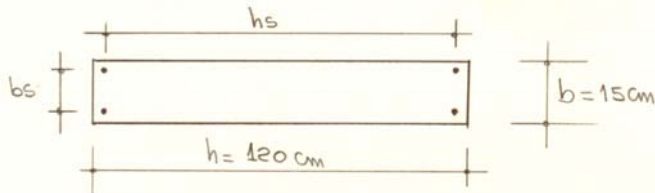
$$V = -0,060$$

$$\mu = 0,046 \rightarrow \rho_s = 0,174\% \rightarrow A_{s1} = 2,61 \text{ cm}^2 \rightarrow A_{s\text{min}} = 2,70 \text{ cm}^2$$

\* Dimensionamento à torção (Mr)

$$\text{Momento torçor} = 0,870 \text{ t.f.m}$$

Seção Resistente



$$b_s = b - 2 \times 4,5 - 2 \cdot \phi_t - \phi_l$$

$$b_s = 15 - 3 - 2 \cdot 0,5 - 1 = 10 \text{ cm}$$

$$h_s = 120 - 5 = 115 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{6} b = \frac{5 \cdot 15}{6} = 12,5 \text{ cm}$$

$$b_s < \frac{5}{6} b \rightarrow h_1 = \frac{b_s}{5} = 2 \text{ cm}$$

$$A_e = b_s \cdot h_s = 10 \cdot 115 = 1150 \text{ cm}^2$$

Tensões devidas à torção

$$\sigma_{td} = \frac{T_d}{2 \cdot h_s \cdot A_e} = \frac{1,4 \cdot 87000}{2 \cdot 2 \cdot 1150} = 26,48 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{tu} = 0,22 \cdot f_{cd} = 0,22 \cdot \frac{150}{1,4} = 23,57 \text{ kgf/cm}^2$$

Como não se verifica a condição  $\sigma_{td} \leq \sigma_{tu}$  a seção deveria ser aumentada; entretanto, devido à existência dos degraus, que aumentam a resistência da peça e não foram considerados no cálculo, admite-se que a peça resista às tensões oriundas da torção já que o valor de  $\sigma_{td}$  supera ligeiramente (12%) o valor de  $\sigma_{tu}$ .

A verificação correta a ser feita para a peça, já que existe também um esforço cortante ( $V_{\max} = 1,476 \text{ t.f.}$ ),

$$e': \frac{\sigma_{wd}}{\sigma_{wu}} + \frac{\sigma_{td}}{\sigma_{tu}} \leq 1$$

No presente exemplo foi desprezada a influência do esforço cortante já que o seu efeito é muito pequeno.

$$\sigma_{wd} = \frac{1,4 \cdot 1476}{120 \cdot 12,5} = 1,38 \text{ kgf/cm}^2 \ll \sigma_{wu} = 0,25 \cdot \frac{150}{44} = 26,78 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Armaduras de torção:

$$\frac{A_{sl}}{u} = \frac{A_{90}}{S} = \frac{Td}{2 \cdot A_e \cdot f_t d} = \frac{1,4 \cdot 87000}{2 \cdot 1150 \cdot 4350} = 0,012$$

$$p/ S = 100 \text{ cm} \rightarrow A_{90} = 1,20 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$u = 2(bs + hs) = 2(10 + 115) = 250 \text{ cm}$$

$$A_{sl} = 0,012 \cdot 250 = 3 \text{ cm}^2$$

\* Dimensionamento para o momento  $M_s = 2,642 \text{ t}\cdot\text{m}$  que provoca flexão lateral.

Seção: (15x120)

$$d' = 2,5$$

$$A_s = 0,742 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \text{ min}} = \frac{0,15}{100} \cdot 15 \cdot 120 = 2,70 \text{ cm}^2 \text{ (valor que prevalece)}$$

Adoção das armaduras:

\* Armaduras longitudinais p/  $M_t$  e  $M_R$  (torção)

$$\text{Arm. positiva} = 2,75 \text{ cm}^2 + \frac{A_{sl}}{2} = 2,75 + \frac{3,0}{2} = 4,25 \text{ cm}^2 \rightarrow \phi 8,0 \text{ c/14}$$

$$\text{Arm. negativa} = 2,70 \text{ cm}^2 + \frac{3,0}{2} = 4,2 \text{ cm}^2 \rightarrow \phi 8,0 \text{ c/14}$$

\* Armadura longitudinal p/  $M_s$

$$A_s = 2,70 \text{ cm}^2 \rightarrow 4 \phi 10 (A_{se} = 3,20 \text{ cm}^2)$$

\* Armadura transversal - estribos pl torção

$$A_{so} = 4,20 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (para cada Ramo)}$$

Espaçamento máxima para os estribos:

$$\sigma_{td} \geq 0,6 \sigma_{tu} \rightarrow s \leq \begin{cases} b/2 = 15/2 = 7,5 \text{ cm} \\ h/3 = 120/3 = 40 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases}$$

Para seguir as recomendações da NB-1178 deve-se ter como estribo:  $1 \phi 5,0 \text{ c}/7,5 \rightarrow A_{se} = 2,66 \text{ cm}^2/\text{m}$

Pode-se adotar para os estribos uma bitola um pouco mais fina, como por exemplo,  $\phi_t = 4,2$ .

$$\text{Se for adotado } 1 \phi 4,2 \text{ c}/7,5 \text{ tem-se } A_{se} = 1,84 \text{ cm}^2/\text{m}$$

- Determinação das armaduras no lance inferior

A única diferença existente entre os esforços atuantes no lance superior e no inferior é que neste o esforço normal é de compressão. Deste modo, para os momentos  $M_t$  (que fletam a peça no plano vertical), as armaduras devem ser obtidas através de um dimensionamento à flexo-compressão, o que conduz a uma armadura mínima. Como para o lance superior as armaduras calculadas foram praticamente iguais à mínima, vamos adotar para o lance inferior as mesmas do lance superior.

## - Determinação das armaduras no patamar

\* Momento  $M_t = 0,562 \text{ t}\cdot\text{m}$  fletindo o patamar em um plano vertical segundo os eixos  $S_e R$

$$\text{Seção: } (120 \times 12)$$

$$d' = 20 \text{ cm}$$

$$A_s = 1,90 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_{\text{mín}}} = \frac{0,15 \cdot 120 \cdot 12}{100} = 2,16 \text{ cm}^2 \rightarrow 1 \phi 6,3 \text{ c/17}$$

Como essa armadura deve adentrar os lances, por praticidade, adota-se o espaçamento igual a 14 cm que é o espaçamento das armaduras longitudinais dos mesmos.

\* Momento  $M_R = 0,720 \text{ t}\cdot\text{m}$  fletindo o patamar em um plano vertical segundo os eixos  $S_e t$ .

$$\text{Seção: } (60 \times 12) \text{ (admitindo que somente metade do patamar resista ao esforço)}$$

$$d' = 20 \text{ cm}$$

$$A_s = 2,60 \text{ cm}^2 \rightarrow 1 \phi 8,0 \text{ c/11}$$

\* Momento  $M_s = 2,72 \text{ t}\cdot\text{m}$  fletindo lateralmente o patamar

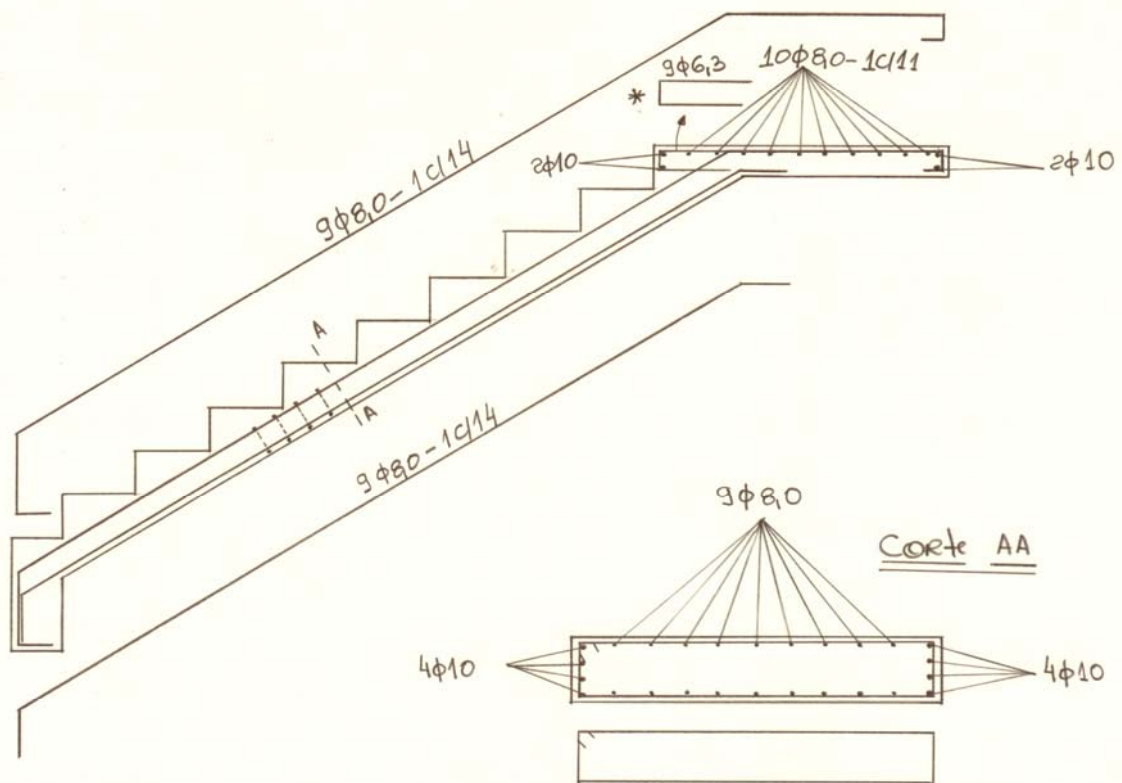
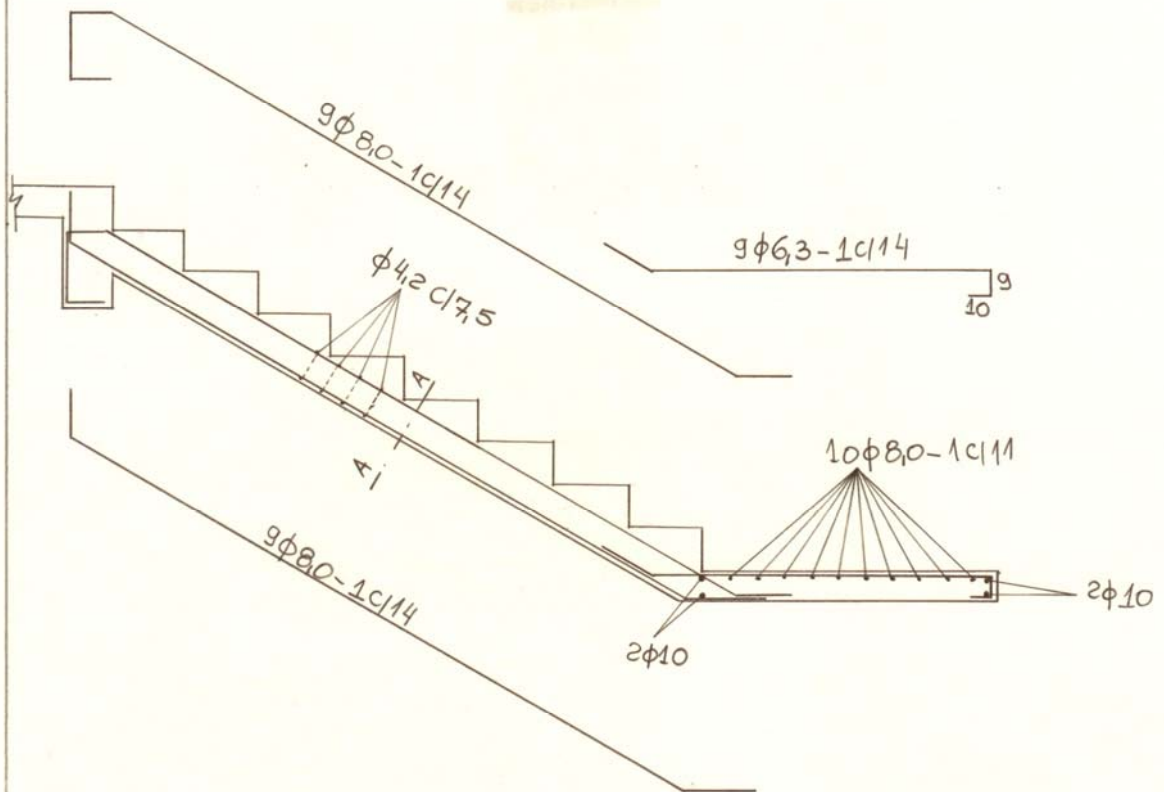
$$\text{Seção: } (12 \times 60)$$

$$d' = 25 \text{ cm}$$

$$A_s = 4,63 \text{ cm}^2 \rightarrow 2 \phi 10$$

$$A_{s_{\text{mín}}} = 4,08 \text{ cm}^2$$

## - Detalhamento das armaduras



\* Ver obs. na página seguinte

Muitas vezes costuma-se aermar uma viga identificada no patamar na junção deste com os lances. Tal armadura não é calculada, mas simplesmente adotada.

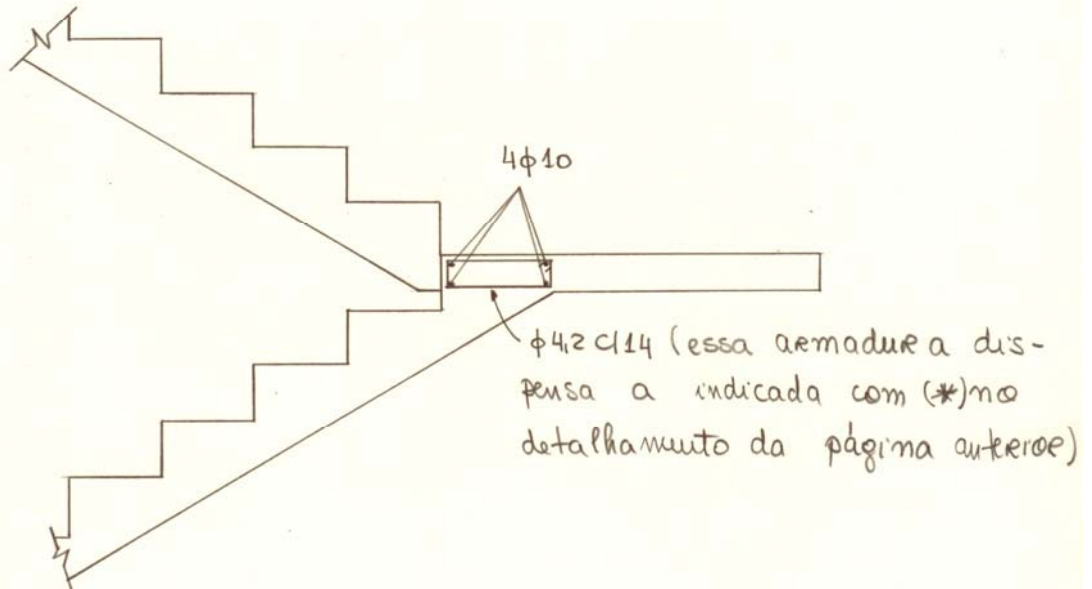
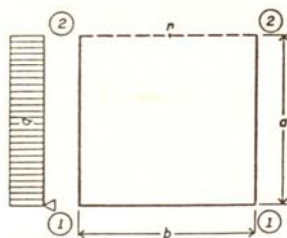


TABELA 1 A

LAJE RETANGULAR SOBRE 3 APOIOS COM CARGA DISTRIBUIDA TOTAL



Multiplicador para os momentos e reações concentradas nos cantos:  $qb^2$   
 Multiplicador para as flexas:  $qb^4/D$

$\frac{a}{b}$	$f$	$M_a$	$M_b$	$f_r$	$M_r$	$Q_1$	$Q_2$
0,30	0,00131	0,0100	0,0114	0,00247	0,0218	-0,0660	0,0465
0,35	0,00176	0,0126	0,0150	0,00322	0,0290	-0,0757	0,0481
0,40	0,00224	0,0151	0,0194	0,00398	0,0363	-0,0842	0,0494
0,45	0,00274	0,0174	0,0243	0,00474	0,0436	-0,0918	0,0501
0,50	0,00326	0,0192	0,0295	0,00550	0,0510	-0,0987	0,0494
0,55	0,00378	0,0206	0,0346	0,00623	0,0583	-0,1043	0,0479
0,60	0,00430	0,0217	0,0396	0,00694	0,0651	-0,1094	0,0457
0,65	0,00480	0,0224	0,0446	0,00759	0,0716	-0,1141	0,0430
0,70	0,00529	0,0228	0,0493	0,00820	0,0774	-0,1182	0,0400
0,75	0,00576	0,0230	0,0538	0,00873	0,0828	-0,1217	0,0368
0,80	0,00621	0,0231	0,0581	0,00922	0,0875	-0,1244	0,0336
0,85	0,00664	0,0230	0,0622	0,00965	0,0917	-0,1267	0,0304
0,90	0,00703	0,0228	0,0661	0,01003	0,0955	-0,1285	0,0271
0,95	0,00740	0,0223	0,0698	0,01040	0,0992	-0,1301	0,0237
1,00	0,00776	0,0216	0,0733	0,01075	0,1026	-0,1313	0,0203
1,10	0,00839	0,0204	0,0797	0,01125	0,1076	-0,1329	0,0134
1,20	0,00895	0,0189	0,0853	0,01168	0,1119	-0,1339	0,0111
1,30	0,00941	0,0175	0,0902	0,01198	0,1148	-0,1343	0,0098
1,40	0,00985	0,0161	0,0944	0,01222	0,1172	-0,1346	0,0084
1,50	0,01027	0,0148	0,0979	0,01242	0,1191	-0,1348	0,0073
1,75	0,01097	0,0116	0,1051	0,01264	0,1213	-0,1352	0,0045
2,00	0,01156	0,0088	0,1106	0,01284	0,1232	-0,1355	0,0018

TABELA VII-18-IV — LAJE COM TRÊS BORDAS APOIADAS E OUTRA LIVRE

Carga uniformemente distribuída  $q$  ( $t/m^2$ )  
 $Q = q \cdot a \cdot b$   
 $Q_x = \chi_x \cdot Q$        $Q_y = \chi_y \cdot Q$        $R = q \cdot Q$   
 $M_{xm} = Q/m_{xm}$        $M_{ym} = Q/m_{ym}$        $\omega = Q \cdot L^2 / \omega_1 \cdot E \cdot h^3$   
 $M_{xi} = Q/m_{xi}$        $M_{yi} = Q/m_{yi}$

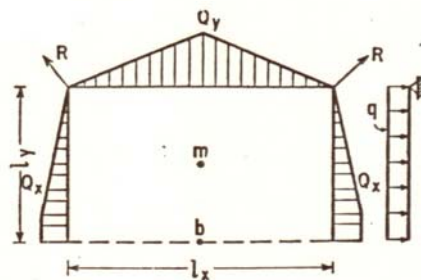


Fig. VII-33-IV

$\alpha = \frac{L_y}{L_x}$	0,125	0,250	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$m_{xb}$	80,0	16,0	13,3	10,6	10,0	9,6	9,5	9,6	10,2	11,5	13,1	14,7	16,3
$m_{xm}$	88,0	28,5	25,8	21,4	18,2	16,2	14,4	14,0	14,8	15,1	16,2	17,5	19,2
$m_{ym}$	80,0	23,8	23,5	20,4	20,0	21,5	25,8	32,3	40,0	50,0	61,0	73,0	84,0
$m_{xi}$	8,1	8,4	8,6	9,1	9,7	10,5	12,6	15,1	17,9	21,3	24,7	28,5	33,3
$\omega$	21,7	11,6	9,9	8,25	7,6	7,35	7,35	7,65	8,05	8,7	9,6	11,0	12,8
$\chi_x$	0,30	0,34	0,35	0,37	0,39	0,40	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42
$\chi_y$	0,90	0,80	0,78	0,70	0,64	0,58	0,48	0,42	0,38	0,34	0,32	0,30	0,28
$q$	0,25	0,24	0,24	0,22	0,21	0,19	0,16	0,13	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06